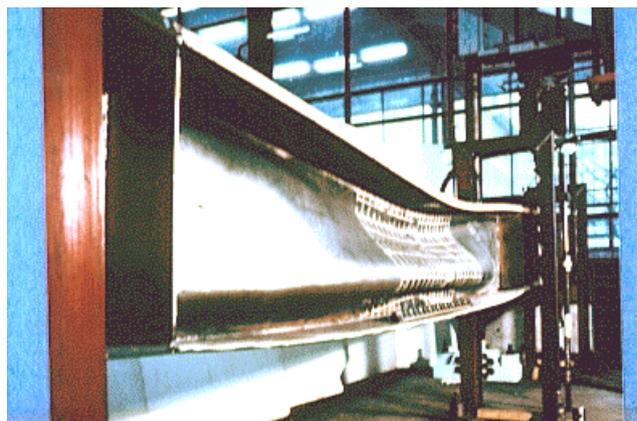
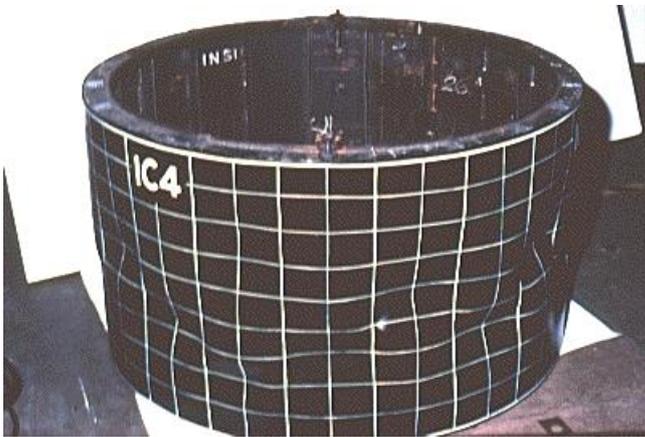


Stabilité Appliquée



Stabilité appliquée

Ce cours est totalement issu du Cdrom « Support pédagogique pour l'enseignement de la construction métallique », réalisé par l'Association pour la Promotion de l'enseignement de la construction acier, édité par l'Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier (immeuble Pacific, 13 cours Valmy, 92070 La Défense Cedex).

Le Cdrom est constitué de 18 volumes. Le volume N°6, qui s'intitule « stabilité appliquée », a été rédigé par les auteurs suivants :

PRÉSIDENT

Prof. R. Maquoi	Université de Liège	Belgique
-----------------	---------------------	----------

PARTICIPANTS

Prof. E. Alarcón	Université Polytechnique de Madrid	Espagne
Ir. F. Bijlaard	TNO Building & Construction Research	Pays-Bas
Dr D. Camotim	CMEST	Portugal
Mr. Y. Galéa	CTICM	France
Prof. D. Nethercot	Université de Nottingham	Grande-Bretagne
Dr G. Owens	The Steel Construction Institute	Grande-Bretagne
Mr. J. Rondal	Université de Liège	Belgique

Les leçons ont été traduites par Anne-Françoise CUTTING-DECELLE et les exemples ont été traduits par Dinar CA MOTIM.



Michel MAYA

maya@mmaya.fr

www.mmaya.fr

Concepts d'équilibre élastique stable et instable 4

1. INTRODUCTION.....	5
2. ETATS D'EQUILIBRE STABLE ET INSTABLE	5
3. ENERGIE POTENTIELLE MINIMALE.....	6
4. FLAMBEMENT PAR BIFURCATION.....	6
5. COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DE SYSTEMES PARFAITS ET NON-PARFAITS.....	7
6. FLAMBEMENT AVEC POINT LIMITE	8
7. COÏNCIDENCE DE PLUSIEURS MODES D'INSTABILITE	9
8. CONCLUSION	9
9. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	9

Critères généraux de la stabilité élastique10

1. INTRODUCTION.....	11
2. GENERALITES.....	11
3. PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL.....	12
4. PRINCIPE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE STATIONNAIRE	14
5. STABILITE DE L'EQUILIBRE	15
6. EQUILIBRE NEUTRE - CHARGEMENT CRITIQUE	16
7. ILLUSTRATION SUR DES EXEMPLES DE BASE	17
7.1 Exemple 1	17
7.2 Exemple 2	18
8. CONCLUSION.....	20
9. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	21

Modes d'instabilité élastique22

1. INTRODUCTION.....	23
2. FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR FLEXION	25
3. FLAMBEMENT LATERAL.....	26
4. VOILEMENT DES PLAQUES	28
5. CONCLUSION.....	29
6. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	29

Méthodes générales de détermination des charges critiques30

1. INTRODUCTION.....	31
2. APPLICATION DES METHODES ENERGETIQUES GENERALES AUX SYSTEMES ELASTIQUES	31
3. COEFFICIENT DE RAYLEIGH.....	32
4. METHODE DE RAYLEIGH-RITZ	33
5. METHODE DE GALERKIN.....	34
6. METHODES NUMERIQUES	35
6.1. Méthode des différences finies d'Euler	35
6.2. Méthode des éléments finis	35
7. QUELQUES ENERGIES DE DEFORMATION TYPIQUES.....	36
7.1 Eléments barres	36
7.1.1 Notation	36
7.1.2 Energie de déformation	36
7.2 Plaques minces	37

7.2.1	Notation	37
7.2.2	Energie de déformation	37
8.	EXEMPLE FAISANT APPEL AUX DIFFERENTES METHODES.....	37
8.1	Méthode du coefficient de Rayleigh	37
8.2	Méthode de Rayleigh-Ritz	38
8.3	Méthode de Galerkin	39
9.	CONCLUSION.....	40
10.	LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	41

Méthodes itératives de résolution des problèmes de stabilité.....	42
1. INTRODUCTION.....	43
2. METHODE DE VIANELLO.....	44
3. EXAMEN DE LA METHODE DE NEWMARK.....	44
3.1 Conventions de signe	45
3.2 Concepts	45
4. METHODE DE VIANELLO-NEWMARK.....	46
5. CONFIGURATIONS D'EQUILIBRE.....	47
6. CONCLUSION.....	48
7. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	48

Flambement des éléments réels de structure (1^{ère} partie).....	49
1. INTRODUCTION.....	50
2. EFFET DE LA PLASTICITE DU MATERIAU.....	50
2.1 Modèle de comportement rigide-plastique parfait	50
2.2 Modèle de comportement élasto-plastique parfait	51
2.3 Courbe de résistance d'un barreau parfait	51
2.4 Effets du comportement élasto-plastique réel sur le matériau	52
3. RESISTANCE DE BARREAUX REELS.....	53
3.1 Effet des imperfections géométriques	53
3.1.1 Non linéarité initiale	53
3.1.2 Excentricité du chargement	56
3.2 Effet des contraintes résiduelles	56
3.4 Effets combinés des imperfections	57
4. CONCLUSION.....	58
5. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	58

Flambement des éléments réels de structure (2^{ème} partie).....	59
1. INTRODUCTION.....	60
2. VOILEMENT.....	60
3. FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR TORSION.....	64
4. FLAMBEMENT PAR FLEXION-TORSION.....	65
5. DEVERSEMENT DES POUTRES.....	66
6. FLAMBEMENT DES COQUES.....	67
7. AMELIORATIONS DE LA RESISTANCE AU FLAMBEMENT.....	69
8. INSTABILITE DE PORTIQUE.....	69
9. CONCLUSION.....	70
10. LECTURES COMPLEMENTAIRES.....	71

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.1

Concepts d'équilibre élastique stable et instable

OBJECTIF

Introduire les principaux concepts et définitions nécessaires à la compréhension de l'équilibre élastique stable et instable dans les structures.

RESUME

Ce cours débute par la définition des états d'équilibre stable et instable d'un système mécanique. On y introduit la loi du minimum de l'énergie potentielle et sa relation avec la stabilité d'une structure au moyen de considérations non-mathématiques. On y présente les concepts du flambement par bifurcation, pour les systèmes parfaits et du flambement par divergence, pour les systèmes non-parfaits. On évoque aussi rapidement le comportement post-critique d'un système et la réduction de la stabilité lorsqu'il y a coïncidence de plusieurs modes d'instabilité.

1. INTRODUCTION

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement.

Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{CR} . Plus généralement, il faut déterminer :

- les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés,
- celles parmi ces configurations qui sont stables,
- la valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

2. ETATS D'EQUILIBRE STABLE ET INSTABLE

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : « L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière.

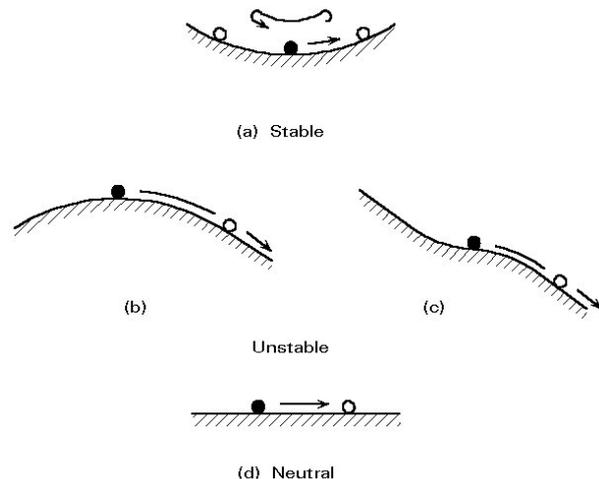


Figure 1 The three states of equilibrium

où V doit croître. Par conséquent, le déplacement depuis l'état initial restera faible et l'état d'équilibre est stable.

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support

Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W , on a alors :

$$W = T + V = \text{constante} \quad (1)$$

à cause du principe de conservation de l'énergie.

Dans cette relation, T représente l'énergie cinétique du système et V l'énergie potentielle. Une faible augmentation de T s'accompagne d'une diminution faible identique de V et vice versa. Si le système est initialement en configuration d'équilibre d'énergie potentielle minimale, alors l'énergie cinétique T du déplacement libre correspondant décroît dans la mesure

courbe. Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de V minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre ».

3. ENERGIE POTENTIELLE MINIMALE

L'exemple intuitif de la bille conduit à la loi de l'énergie potentielle minimale pour un système : « Un système élastique conservatif est en état d'équilibre stable si et seulement si, la valeur de l'énergie potentielle correspond à un minimum relatif ».

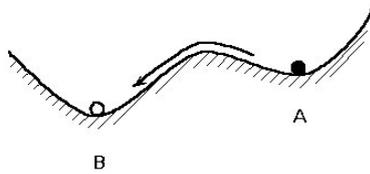
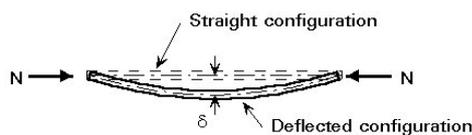


Figure 2 Relative character of the equilibrium

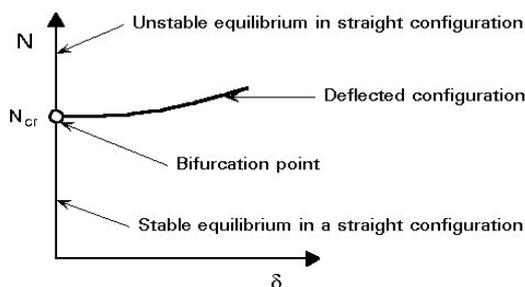
On utilise le terme de « minimum relatif » parce qu'il peut y avoir tout près d'autres minima correspondant à des valeurs plus faibles de l'énergie potentielle, séparés par de petites « buttes », mais qui nécessitent de fortes perturbations pour passer de l'un à l'autre. L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle, en configuration d'équilibre, est, d'un point de vue strict, une condition seulement suffisante de stabilité. En pratique, cependant, ce principe est généralement accepté comme une condition à la fois nécessaire et suffisante de stabilité.

4. FLAMBEMENT PAR BIFURCATION

On a vu que le concept de stabilité est en relation avec l'énergie potentielle d'un système. Cependant, la stabilité d'un système élastique statique ou d'une structure, peut aussi s'expliquer par des considérations de rigidité. Si l'on se réfère à la figure 1a, on peut voir que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au déplacement donne la rigidité (sur la figure : la pente de la surface) du système.



(a) Simply supported column



(b) Axial force VS deflection relationship

Figure 3 Stability of a compressed column

De ce fait, une rigidité positive implique un état stable, tandis que, à la limite de la stabilité, la rigidité disparaît. Pour une structure, la rigidité est fournie sous forme matricielle qui, si elle est à la fois définie et positive, garantit à la structure un état stable. Le point auquel l'état d'un système change, pour passer d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre neutre est appelé « limite de stabilité ».

Le système de la bille sur un support courbe (dans ce cas la stabilité ne dépend que de la forme de la surface) peut être comparé à une structure telle qu'un poteau en compression. Dans ce cas, le poteau peut être stable ou instable, selon la valeur de la charge axiale, paramètre de contrôle du système (figure 3a). Comme l'élément est initialement rectiligne et la charge axiale, la structure sera en équilibre stable pour des valeurs de N faibles ; s'il y a des déflexions dues à des forces perturbatrices, le poteau reviendra à sa position rectiligne. Lorsque la charge atteint un certain niveau, appelé « charge critique », l'équilibre stable atteint une

limite. Pour cette valeur N_{cr} de la charge, il existe une autre position d'équilibre, correspondant à une configuration légèrement déformée du poteau ; si, pour cette valeur, l'élément est déformé par une perturbation quelconque faible, il ne reviendra pas à sa configuration rectiligne.

Si la charge dépasse la valeur critique, la position rectiligne est instable et une perturbation légère conduit à de grands déplacements pour l'élément, puis, enfin, à l'effondrement du poteau par flambement. Le point critique, au-delà duquel les déplacements de l'élément deviennent très grands, est appelé « point de bifurcation » du système (figure 3b).

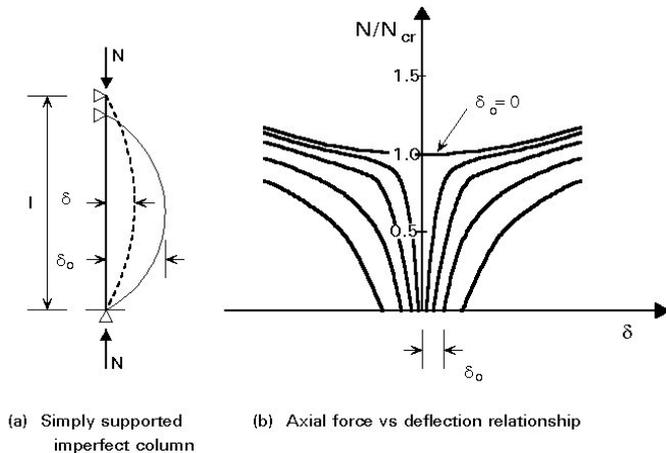


Figure 4 Stability of an imperfect compressed column stability, mais conduit à de grands déplacements. Par ailleurs, des diminutions importantes de rigidité proviennent de changements dans les propriétés mécaniques (élastiques ou de rupture) du matériau et, de ce fait, conduisent à l'effondrement de l'élément. On reviendra sur ce point important dans la suite de cette leçon.

Si le poteau n'est pas initialement parfaitement rectiligne, la déflexion commence dès le début du chargement, il n'y a pas flambement soudain par bifurcation, mais augmentation continue des déplacements (figure 4). Ce phénomène est appelé « divergence d'équilibre » et il n'y a pas de limite de stabilité stricte. Si le matériau reste élastique, la rigidité du poteau (donnée ici par la pente de la courbe $N.\delta$) est toujours positive, mais une petite perturbation produira de très grands déplacements. La diminution de rigidité d'un élément de structure est, en général, due à un changement soit de la géométrie, soit des propriétés mécaniques. La diminution de rigidité due à une modification de la géométrie ne crée généralement pas de perte de

5. COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DE SYSTEMES PARFAITS ET NON-PARFAITS

Au-delà du point de bifurcation, on rencontre principalement trois situations possibles, selon le type de système à étudier (figure 5). Sur cette figure, N représente la charge appliquée, δ le déplacement d'un point du système et ξ l'amplitude de l'imperfection. Les traits épais représentent les lignes d'équilibre de systèmes parfaits, les traits fins les lignes d'équilibre de systèmes non-parfaits ; les traits continus représentent l'équilibre stable et les traits pointillés l'équilibre instable :

- Figure 5a : point de bifurcation symétrique - stable

Des imperfections petites, positives ou négatives ont les mêmes effets et donnent lieu à une trajectoire stable d'équilibre vers le haut. Le flambement se caractérise par une augmentation rapide du déplacement lorsque l'on s'approche de la charge critique du système parfait. Ce cas est très important en pratique car les poteaux, poutres et plaques présentent ce type de comportement post-critique.

- Figure 5b : point de bifurcation symétrique - instable

Les imperfections jouent un rôle important dans la modification du comportement du système. De petites imperfections des deux signes induisent une diminution de la charge critique. C'est par exemple le cas de certains systèmes composés de barres articulées.

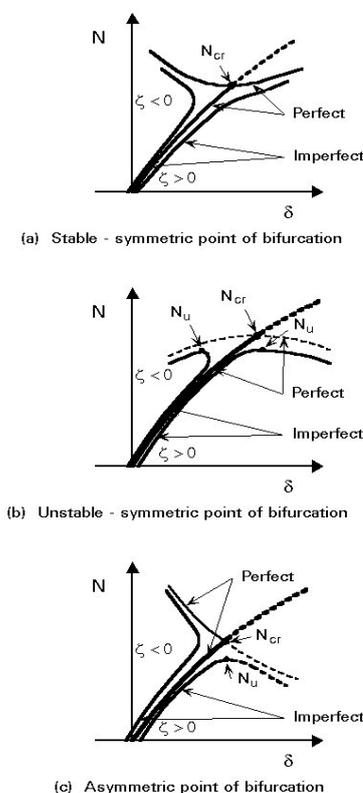


Figure 5 Post-critical behaviour

- Figure 5c : point de bifurcation asymétrique
 Pour des imperfections positives faibles, le système perd sa stabilité en un point limite (charge ultime), largement plus faible, comparé au point critique. D'autre part des imperfections négatives faibles conduisent à une trajectoire vers le haut, stable. Ici, le système est surtout sensible à des imperfections initiales positives. C'est par exemple le cas de certaines poutres à treillis.

La figure 6 illustre ces trois comportements post-critiques.

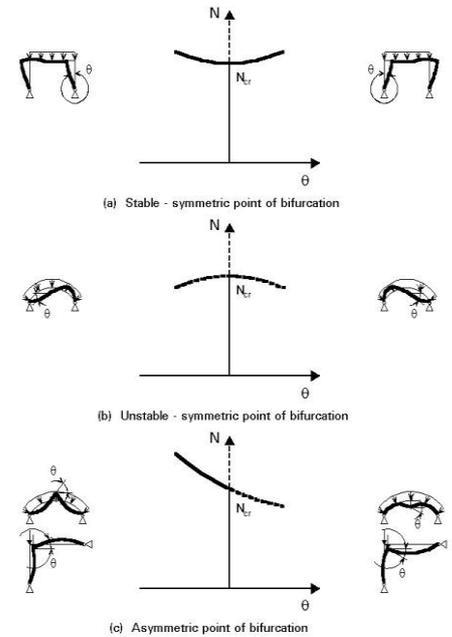
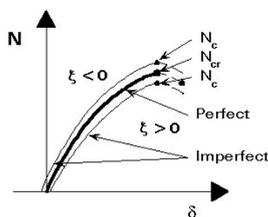


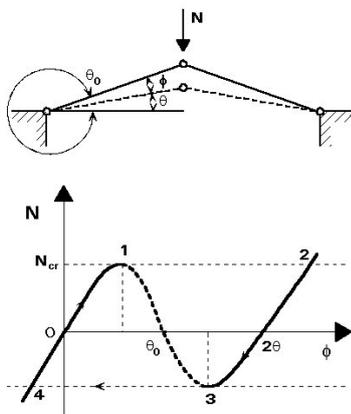
Figure 6 Examples of post-critical behaviour

6. FLAMBEMENT AVEC POINT LIMITE

Le flambement associé à une bifurcation d'équilibre n'est pas la seule forme d'instabilité que l'on peut rencontrer. Dans le cas des arcs, des treillis de faible hauteur et des dômes sphériques, par exemple, un flambement de changement de position d'équilibre, se produisant avec un claquement sec peut avoir lieu quand le trajet initialement stable perd sa stabilité dès que l'on atteint localement une valeur maximum de la charge, appelée « point limite » du système.



(a) Limit point buckling of a perfect and of an imperfect system



(b) Limit point buckling of a shallow truss

Figure 7 Limit point buckling

Ceci est représenté sur la figure 7a, on peut voir aussi sur ce schéma que la réponse d'un système non-parfait est semblable à celle du système parfait correspondant.

La figure 7b illustre ce comportement de flambement en considérant un treillis de faible hauteur fait de deux barres articulées. Quand on commence à appliquer la charge, on suit un chemin stable 0-1. Au point 1, le système perd sa stabilité ; entre les points 1 et 2, on a un saut dynamique à travers des états de non-équilibre et le treillis se retrouve à l'envers (changement brutal de position d'équilibre, le passage d'un état à l'autre donnant lieu à un claquement sec). Le point 2 se trouve aussi sur un chemin stable et le chargement peut continuer. Par exemple, une séquence de déchargement suit le chemin stable entre les points 2 et 3, pour lequel, une fois de plus, il y a perte de stabilité conduisant la structure au saut dynamique entre les points 3 et 4. Au point 4, la structure se retrouve sur son chemin stable d'origine et un nouveau cycle de chargement peut commencer. Ceci montre que la ligne pointillée entre les points 1 et 3 qui représente les états d'équilibre instable, est totalement inaccessible pendant le processus de chargement.

7. COÏNCIDENCE DE PLUSIEURS MODES D'INSTABILITE

Dans certains cas, les structures peuvent présenter plusieurs modes d'instabilité, presque pour les mêmes valeurs des charges critiques ou pour des charges critiques très voisines. Dans ces cas, appelés bifurcations couplées, les imperfections peuvent conduire à une diminution significative de la charge ultime par rapport aux charges ultimes des modes pris séparément. Les problèmes de bifurcation couplée sont en général difficiles à analyser. Certaines instabilités couplées que l'on peut rencontrer dans les structures en acier sont mentionnées ci-dessous :

- couplage du flambement de poteau et du voilement dans les poteaux à âme mince,
- couplage du flambement latéral et du voilement dans les poutres à âme mince,
- couplage du flambement généralisé et du flambement d'éléments dans les poteaux à treillis,
- couplage du flambement individuel de poteau et du flambement généralisé de l'ossature,
- couplage du flambement des raidisseurs et du voilement pour des plaques ou coques raidies.

La figure 8 montre la diminution de la charge de flambement due au couplage d'un mode de flambement local avec un mode global, de la manière suivante :

- flambement local des plaques formant les quatre côtés d'une section carrée creuse,
- flambement global d'Euler du poteau.

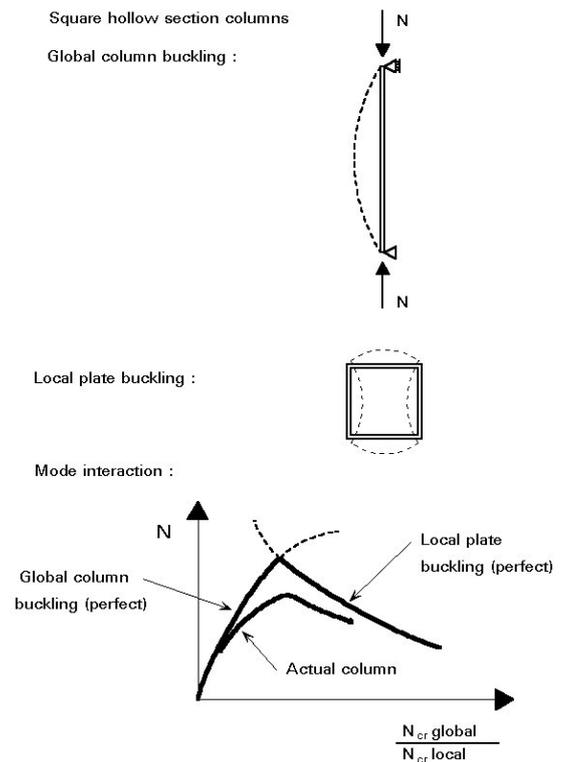


Figure 8 Coupling of two buckling modes

8. CONCLUSION

- Les états d'équilibre stable et instable d'une structure peuvent être définis au moyen de l'énergie potentielle du système ; l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle est une condition suffisante de stabilité.
- Le point de bifurcation ou le point limite définit la forme d'instabilité d'une structure.
- Le comportement post-critique est une caractéristique importante d'une structure.
- Si une structure peut présenter plusieurs modes d'instabilité pour presque la même valeur de la charge critique, les imperfections de structure conduiront à une diminution de la charge ultime par rapport aux charges ultimes correspondant aux modes pris séparément.

9. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Timoshenko, S.P. et Gere, J.M., "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, 2nd Edition, New-York, 1961
2. Allen, H.G. et Bulson, P.S., "*Background to Buckling*", McGraw-Hill, London, 1980
3. Thompson, J.M.T. et Hunt, G.W., "*A General Theory of Elastic Stability*", John Wiley and Sons, London, 1973

Galambos, T.V. (éditeur), "*Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*", John Wiley and Sons, 4th Edition, New-York, 1988.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.2

Critères généraux de la stabilité élastique

OBJECTIF

Établir les critères généraux de la stabilité élastique et de l'équilibre neutre. Il s'agit de préparer le travail de l'utilisation des méthodes énergétiques dans la détermination des charges critiques qui sera vue dans la leçon 6.4.

RESUME

La conception d'ensemble d'une structure exige que, sous chargement imposé, la configuration d'équilibre d'une structure soit déterminée et confirmée comme étant stable ; l'étude des problèmes de stabilité se fait généralement en utilisant des critères énergétiques. Dans cette leçon, on présente le principe du travail virtuel et le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. On établit les critères généraux de l'énergie pour la stabilité élastique qui en découlent, ainsi que la détermination des charges critiques correspondant à l'équilibre neutre. On ne considère que les systèmes parfaitement conservatifs. Les critères établis sont illustrés par deux exemples de base construits à partir de systèmes à barres et à ressorts.

1. INTRODUCTION

La conception générale des structures suppose la détermination des forces d'équilibre interne (moments, cisaillements, etc.) de la structure, sous charge donnée et la confirmation que la structure, sous ces conditions, est stable. Il est fondamental d'être sûr qu'une structure, légèrement écartée de sa position d'équilibre par des forces, des chocs, des vibrations, des imperfections, des contraintes résiduelles, etc. aura tendance à revenir à sa position initiale dès la suppression de la perturbation ; cette caractéristique requise de stabilité élastique est devenue de nos jours de plus en plus critique avec l'usage croissant d'aciers à haute résistance dans des structures de plus en plus légères et élancées.

La théorie de la stabilité élastique (flambement) fournit des méthodes pour déterminer :

- la stabilité d'une configuration d'équilibre,
- la valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique. L'objet de cette leçon est donc de présenter rapidement à l'étudiant et à l'ingénieur praticien les principes de mécanique nécessaires à la compréhension des critères généraux de la stabilité élastique, de ce fait de donner une meilleure compréhension des méthodes utilisées dans la recherche du flambement, en particulier les méthodes énergétiques étudiées dans la leçon 6.4.

La portée de cette leçon se restreint à :

- des chargements conservatifs et des systèmes élastiques adiabatiques (systèmes parfaitement conservatifs),
- des systèmes dont les configurations peuvent être exprimées par des fonctions avec un nombre fini de paramètres de déplacement.

Il faut noter que l'on ne considère que l'aspect statique de la stabilité.

2. GENERALITES

Dans cette leçon, on considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement. Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici $q_1, q_2 \dots q_n$ ou plus généralement q_i . Une poutre à travée unique peut, bien sûr,

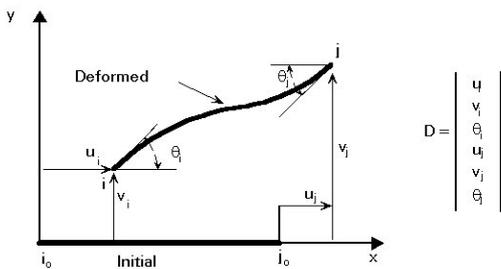


Figure 1 Generalised beam.

avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients q_i de la série de Fourier représentant la flèche :

$$y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L}$$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées

représentant les degrés de liberté du système. Si l'on considère la poutre de la figure 1, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des nœuds i et j aux extrémités de la poutre : deux

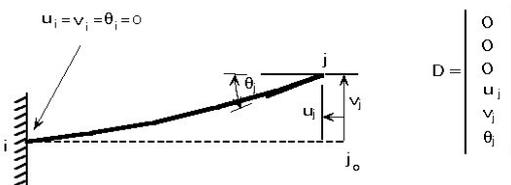


Figure 2 Cantilever

$$D = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

translations u et v et une rotation θ par nœud (dans le plan). On suppose ici que l'ensemble de l'allure de la déformée élastique de la poutre peut être défini en utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation. Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté :

$$D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j).$$

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions

aux variables généralisées. Sur la figure 2, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastree de la poutre console, d'où les restrictions imposées : $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction (de décohésion), c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure.

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{\text{ext}} + Q = \Delta T + \Delta U \quad (1)$$

où : W_{ext} représente le travail créé dû aux forces extérieures au système,
 Q représente la quantité de chaleur transmise au système,
 ΔT représente l'augmentation de l'énergie cinétique,
 ΔU représente l'augmentation de l'énergie interne,
 U est souvent appelée énergie de déformation..

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T \quad (2)$$

où : W_{int} représente le travail des forces intérieures,
 W représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (1) et (2) donnent :

$$W_{\text{int}} = Q - \Delta U \quad (3)$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques, $Q = 0$ et l'équation (3) donne :

$$W_{\text{int}} = - \Delta U \quad (4)$$

N.B. : ΔU n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$$\Delta U = 0 \quad \text{donc } W_{\text{int}} = 0 \quad (5)$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) :

$$\Delta T = 0 \quad (6)$$

et les équations (1), (2) et (5) donnent :

$$W_{\text{ext}} = \Delta U \quad (7)$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0 \quad (8)$$

3. PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

L'étude des problèmes de stabilité fait généralement appel au principe du travail virtuel, que l'on va voir dans ce paragraphe. Le problème est d'abord de trouver la configuration d'équilibre réel du système, si elle existe, puis ensuite de vérifier si cette configuration est stable.

Un système donné peut prendre un nombre quelconque de configurations déformées compte tenu des limites fixées par les conditions aux limites, mais seule l'une d'elle est la vraie, correspondant à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons que le système soit dans une configuration caractérisée par les coordonnées généralisées q_1, q_2, \dots, q_n et pour laquelle on recherche l'équilibre.

Supposons que le système soit soumis à des déplacements petits, arbitraires à partir de cette configuration, on ne demandera à ces déplacements que de satisfaire les conditions aux limites, la structure étant soumise à son chargement réel. Les petits déplacements considérés ici ne sont pas nécessairement réels ; ils sont imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, c'est pour cela qu'on les appelle

déplacements virtuels ; ces déplacements virtuels sont indépendants du chargement et sont notés ici δq_i . Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système rigide, les équations (5) et (8) donnent :

$$\delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (9)$$

où : δW_{ext} représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels ; on peut exprimer le Principe du Travail Virtuel de la manière suivante :
 « Un système rigide est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures agissant sur lui est nul dans tout déplacement virtuel qui satisfasse les conditions aux limites ».

Pour un système déformable, l'équation (7) donne :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta U \quad (10)$$

où δU représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel, le Principe du Travail Virtuel peut être exprimé ainsi :
 « Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures est égal à la variation d'énergie de déformation, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites ».

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (8) :

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (11)$$

Configuration d'équilibre réel

Pour un système ayant un nombre fini de coordonnées généralisées ($q_1, q_2 \dots q_n$), le travail virtuel δW correspondant à un déplacement virtuel à partir d'une configuration ($q_1, q_2 \dots q_n$) vers une configuration voisine ($q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n$) peut être représenté par une forme linéaire des variations des coordonnées, soit :

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots = \sum_i Q_i \delta q_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

où Q_1, Q_2, \dots, Q_n représentent des fonctions des coordonnées généralisées q_i et des forces intérieures (pour les systèmes déformables) et extérieures.

Par analogie avec le travail d'une force, les fonctions Q_1, Q_2, \dots, Q_n sont appelées composantes des forces généralisées. Les termes Q_i n'ont pas nécessairement la dimension d'une force et n'ont souvent pas tous la même dimension ; leur dimension est déterminée par le fait que $Q_i \delta q_i$ a la dimension d'un travail. Les équations (11) et (12) donnent :

$$\sum_i Q_i \delta q_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Comme les δq_i sont arbitraires, indépendants des variations de q_i , l'équation (13) implique que :

$$Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

La résolution de ces n équations simultanées d'équilibre donne les valeurs des q correspondant à la configuration d'équilibre réel.

4. PRINCIPE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE STATIONNAIRE

Les forces intérieures et extérieures sont toutes conservatives (système parfaitement conservatif). Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dont la valeur U représente l'énergie de déformation exprimée par l'équation (4). De la même manière, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dont la valeur Ω représente l'énergie potentielle de ces forces. On peut donc dire que toutes les forces dérivent d'une seule fonction scalaire $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est donnée par l'énergie potentielle totale du système. Cette énergie potentielle totale peut être exprimée par :

$$V = U + \Omega \quad (15)$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = - \delta V \quad (16)$$

où δV représente la variation de l'énergie potentielle totale dans le déplacement virtuel et (11) et (16) donnent :

$$\delta V = 0 \quad (17)$$

L'équation (17) est une traduction analytique du Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire qui dit que :

« De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire ».

Configuration d'équilibre réel

Comme $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, δV peut être exprimé par :

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta q_1} \delta q_1 + \frac{\delta V}{\delta q_2} \delta q_2 + \dots = \sum_i \frac{\delta V}{\delta q_i} \delta q_i \quad (18)$$

Ici, les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes, de telle sorte que, si $\delta V = 0$, on a :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Le principe fournit alors n équations d'équilibre exprimées en termes de charges appliquées et de coordonnées généralisées, à partir desquelles on peut déterminer les valeurs des q_i , définissant la configuration d'équilibre.

Il faut noter que les équations (12), (16), (18) et (19), ajoutées au fait que les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes donnent :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

En résumé, il faut noter que, pour des systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel devient le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Le principe est exact et très puissant et peut être utilisé pour développer des méthodes approchées de résolution des problèmes de stabilité en conception générale de structures.

5. STABILITE DE L'EQUILIBRE

On dit qu'un système est en état d'équilibre stable s'il a tendance à revenir à sa configuration d'équilibre d'origine dès l'arrêt de la perturbation (faible) qu'il subissait. Si cette légère perturbation a pour effet de faire quitter au système sa position d'équilibre, il est dit instable. On peut concevoir une situation intermédiaire dans laquelle la configuration légèrement déformée se maintient à l'arrêt de la perturbation. Cette situation détermine un état d'équilibre neutre. Ceci a été vu dans la leçon 6.1, avec l'exemple classique de la bille dans un bol. Il est bien évident que les faibles déplacements dont il est question doivent être compatibles avec les conditions aux limites, de telle sorte qu'ils correspondent à de petites variations des coordonnées généralisées du système ; la discussion relative à la stabilité de l'équilibre peut alors se baser sur les déplacements virtuels.

Le Principe du Travail Virtuel montre que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ; on a aussi vu, dans la leçon 6.1, que l'équilibre est stable pour un minimum relatif ; la condition de stabilité peut donc être écrite sous la forme :

« L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale, en configuration d'équilibre constitue à la fois une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette configuration ».

Si on note ΔV l'augmentation de l'énergie potentielle totale due à un déplacement virtuel à partir de la configuration d'équilibre, on a :

$$\begin{aligned} \Delta V > 0 & : \text{équilibre stable} \\ \Delta V = 0 & : \text{équilibre neutre} \\ \Delta V < 0 & : \text{équilibre instable} \end{aligned} \quad (21)$$

On peut voir que, parce que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ($\delta V = 0$), discuter de la stabilité revient à discuter des termes d'ordre supérieur qui apparaissent dans l'augmentation de l'énergie potentielle totale ΔV .

On suppose que la fonction $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ et ses dérivées partielles par rapport aux q_i jusqu'au troisième ordre sont des fonctions continues des q_i ; ensuite, en faisant un développement en série de Taylor au voisinage de la configuration d'équilibre initial, l'augmentation ΔV de V correspondant aux variations virtuelles δq_i de q_i , s'écrit :

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 0(\delta^3) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

ou :

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + 0(\delta^3) \quad (23)$$

avec :

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$0(\delta^3)$ représente un infiniment petit d'ordre trois.

Le principe du travail virtuel signifie qu'une condition nécessaire d'équilibre est que δV soit nul quels que soient δq_i , soit :

$$\delta V = 0 \quad \text{ou} \quad \partial V / \partial q_i = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Le signe de ΔV est donc gouverné par le signe de $\delta^2 V$, soit, si l'on prend en compte l'équation (21), la condition de stabilité devient :

$$\delta^2 V > 0 \quad (26)$$

Si

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (27)$$

alors

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j a_{ij} \delta q_i \delta q_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

Si l'on introduit la matrice [a] des coefficients a_{ij} , l'équation (28) peut s'écrire :

$$\delta^2 V = \{\delta q\}^t [a] \{\delta q\} \quad (29)$$

La condition de stabilité (équation (26)) impose que [a] soit une matrice définie positive, c'est-à-dire que les mineurs principaux de [a] doivent être positifs.

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions des charges appliquées et des caractéristiques du système, de telle sorte que le fait pour la matrice [a] d'être définie positive impose une condition à vérifier pour les charges afin que la configuration soit stable.

6. EQUILIBRE NEUTRE - CHARGEMENT CRITIQUE

L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale pour une configuration stable et si on considère l'équilibre neutre comme une limite de la stabilité, la condition de l'équilibre neutre peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2 V = 0 = \text{minimum} \quad (30)$$

Si on considère l'équation (29) dans le cas d'une configuration non triviale $\{\delta q\} \neq 0$, l'état d'équilibre neutre est obtenu quand la matrice [a] est singulière.

Les coefficients a_{ij} de [a] sont des fonctions des caractéristiques géométriques et mécaniques du système et aussi des charges appliquées.

Il s'avère donc très important d'un point de vue pratique de pouvoir déterminer les valeurs critiques des charges conduisant à l'équilibre neutre d'un système subissant un changement d'état de stabilité de sa configuration d'équilibre.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si l'on définit un système de chargement de référence S_1 (correspondant à $\alpha = 1$), les charges, à chaque instant d'une histoire du chargement proportionnelle (linéaire) sont égales à :

$$S = \alpha S_1 \quad (31)$$

Seul le facteur multiplicateur de charge est inconnu et la condition d'équilibre neutre nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres :

$$\text{Dét} [a(\alpha)] = 0 \quad (32)$$

La résolution de l'équation (32) conduit à un ensemble de solutions α , appelées α_{cr} , dont le nombre est égal au nombre de coordonnées généralisées du système. Les vecteurs propres représentent la configuration déformée associée à chaque solution α . La plupart de ces solutions mathématiques ne correspondent pas au comportement réel de la structure ; généralement, l'ingénieur ne s'intéresse qu'aux valeurs du chargement au-delà desquelles le système, stable en l'absence de charges, devient instable. Ces charges s'obtiennent normalement pour la plus petite valeur positive α°_{cr} de α_{cr} , et, de ce fait, les charges critiques sont déterminées par :

$$S_{cr} = \alpha^{\circ}_{cr} S_1 \quad (33)$$

7. ILLUSTRATION SUR DES EXEMPLES DE BASE

7.1 Exemple 1

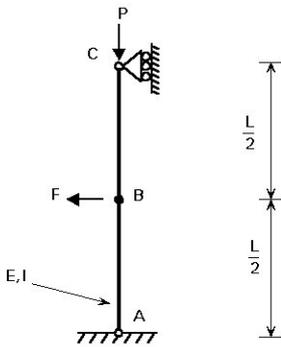


Figure 3 Pin-ended column

Il est intéressant d'illustrer le critère de stabilité sur l'exemple de base de l'élément biarticulé en compression représenté sur la figure 3 ; cependant et afin d'avoir des calculs simples de l'énergie de déformation, on suppose que toute la flexibilité de l'élément est concentrée sur un ressort élastique spirale situé à mi-hauteur, comme on le voit sur la figure 4. Les deux barres, chacune de longueur $L/2$, sont rigides, de telle sorte que leur énergie de déformation est nulle. La valeur K du ressort, constante en B , sera étudiée ultérieurement. Les déplacements latéraux des articulations A et C sont bloqués. La charge P agit verticalement vers le bas en C et la force extérieure F , présente dès le début du chargement, agit horizontalement vers la gauche en B .

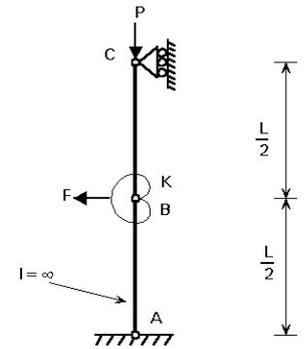


Figure 4 Idealised column model

Compte tenu des conditions aux limites, le système n'a qu'un seul degré de liberté. Prenons le

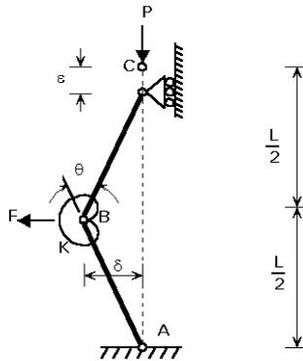


Figure 5 Idealised column with lateral displacements

déplacement latéral de B comme coordonnée généralisée, notée δ sur la figure 5. (Une autre possibilité aurait consisté à choisir la rotation de la barre supérieure ou inférieure). Avant d'étudier la stabilité de ce système, déterminons sa configuration d'équilibre sous les charges P et F . On suppose les déplacements suffisamment petits pour que les fonctions trigonométriques puissent être assimilées au premier terme de leur développement en série. L'énergie de déformation du système dans sa configuration déformée est donnée par le ressort seulement, soit :

$$U = U_0 + \frac{1}{2} K \theta^2$$

θ représente la rotation du ressort (voir figure 5).

On démontre facilement que $\theta = 4\delta/L$, ce qui donne :

$$U = U_0 + \frac{8K\delta^2}{L^2} \quad (35)$$

L'énergie potentielle créée par les charges extérieures vaut :

$$\Omega = \Omega_0 - P \varepsilon - F \delta \quad (36)$$

où Ω_0 représente l'énergie potentielle des charges extérieures lorsque le système se trouve dans sa configuration initiale

ε représente le déplacement vertical créé en C (voir figure 5)

On peut démontrer que, pour de petits déplacements, $\varepsilon = 2\delta^2/L$, ceci donne :

$$\Omega = \Omega_0 - 2P\delta^2/L - F\delta \quad (37)$$

L'énergie potentielle totale vaut :

$$V = U + \Omega = V_0 + \frac{8K\delta^2}{L^2} - \frac{2P\delta^2}{L} - F\delta \quad (38)$$

où V_0 représente l'énergie potentielle initiale du système.

Selon l'équation (19), la configuration d'équilibre est donnée par la solution de :

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = (16K - 4PL) \frac{\delta}{L^2} - F = 0 \quad (39)$$

Ceci donne :

$$\delta = \frac{FL^2}{16K - 4PL} \quad (40)$$

La condition de stabilité, à partir de l'équation (26), peut être exprimée par :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = \frac{16K - 4PL}{L} > 0 \quad (41)$$

Le système sera stable si la condition suivante est remplie :

$$P < 4K/L \quad (42)$$

La valeur de P à la limite constitue sa valeur limite P_{cr} , valeur pour laquelle se produit le flambement élastique. Il est intéressant de noter que cette valeur critique ne dépend pas de la force latérale extérieure F qui agit sur le système. En particulier, cette valeur critique est vraie pour le cas particulier $F = 0$, donnant ainsi le problème classique de flambement d'un poteau sous charge axiale seule.

On peut donner une valeur à K de telle sorte que la flexibilité soit la même que celle de l'élément continu de la figure 3. Elle se définit alors comme la valeur qui conduit au même déplacement latéral δ en B dû à F que dans l'élément continu, en supposant que P est nul.

Pour l'élément continu, la théorie des poutres donne :

$$\delta = FL^3/(48EI) \quad (43)$$

où : I représente le moment d'inertie de flexion de l'élément
 E représente le module de Young.

Pour la barre et le système à ressort, si on exprime le moment en B avec $\theta = 4\delta/L$, on obtient :

$$\delta = FL^2/(16K) \quad (44)$$

Les équations (43) et (44) donnent la constante du ressort équivalent : $K = 3EI/L$ et la valeur critique de P vaut :

$$P_{cr} = 12EI/L^2 \quad (45)$$

Cette valeur doit être comparée à la valeur exacte bien connue $\pi^2 EI/L^2$; la précision du résultat dépend, en fait, des hypothèses faites pour la détermination de la constante équivalente du ressort K .

7.2 Exemple 2

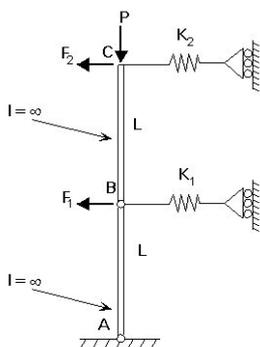


Figure 6 Simple rod and spring system

Considérons maintenant le système à barres et ressorts représenté figure 6. Les deux barres AB et BC , ayant chacune une longueur L , sont rigides (énergie de déformation nulle) et sont articulées et reliées entre elles en B . On restreint les déplacements latéraux en B et C par des ressorts élastiques droits, à la fois de compression et de traction, de rigidité respective K_1 et K_2 . La charge P agit en C verticalement vers le bas et les forces F_1 et F_2 horizontalement vers la gauche, respectivement en B et C .

Si on prend en compte les conditions aux limites, le système possède deux degrés de liberté. On choisit les rotations θ_1 et θ_2 des deux barres comme coordonnées généralisées (voir figure 7). On détermine d'abord la configuration d'équilibre du système, puis on étudie sa stabilité.

L'énergie de déformation du système est celle due aux ressorts seuls.

L'énergie de déformation de chaque ressort vaut $K\delta^2/2$, où δ représente le déplacement latéral du ressort correspondant et K sa raideur (ou constante du ressort). Par conséquent, l'énergie de déformation dans la configuration (θ_1, θ_2) vaut :

$$U = U_o + \frac{1}{2} K_1 L^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2)^2$$

L'énergie potentielle due aux charges extérieures vaut :

$$\Omega = \Omega_o - \frac{1}{2} PL(\theta_1^2 + \theta_2^2) - F_1 L \theta_1 - F_2 L (\theta_1 + \theta_2) \quad (47)$$

L'énergie potentielle vaut :

$$V = U + \Omega \quad (48)$$

Les dérivées utiles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = K_1 L^2 \theta_1 + K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2) - PL \theta_1 - F_1 L - F_2 L \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2) - PL \theta_2 - F_2 L \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL \quad (49) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = K_2 L^2 - PL \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = K_2 L^2 \end{array} \right.$$

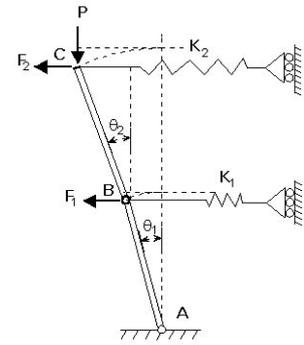


Figure 7 Displacements of simple rod and spring system

Configuration d'équilibre

La condition de l'énergie potentielle stationnaire, équation (19), fournit le système suivant d'équations :

$$\{\theta_1 (K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL) + \theta_2 K_2 L^2 = (F_1 + F_2) L \quad (50)$$

$$\{\theta_1 K_2 L^2 + \theta_2 (K_2 L^2 - PL) = F_2 L$$

La configuration d'équilibre (θ_1, θ_2) peut être facilement obtenue en résolvant ce système d'équations. A ce stade, l'existence d'une solution ne nécessite que de pouvoir définir le déterminant, c'est-à-dire :

$$\text{Dé} = (K_2 L^2 - PL) K_1 L^2 + PL (PL - 2K_2 L^2) \neq 0 \quad (51)$$

Stabilité

La condition de stabilité d'une configuration d'équilibre est donnée par l'équation (26) et la matrice [a], dont les coefficients sont donnés par l'équation (27) est déterminée de la manière suivante :

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL & K_2 L^2 \\ K_2 L^2 & K_2 L^2 - PL \end{bmatrix} \quad (52)$$

Les conditions de stabilité imposent à la matrice [a] d'être définie positive, c'est-à-dire que les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$(K_2 L^2 - PL) K_1 L^2 + PL (PL - 2K_2 L^2) > 0 \quad (53)$$

$$K_2 L^2 - PL > 0 \quad (54)$$

Il faut noter que la première condition incorpore la condition (51) d'existence d'une configuration d'équilibre ; ceci résulte du fait que V est une forme quadratique des θ .

On démontre facilement que la condition la plus restrictive, des équations (53) et (54), conduit à l'exigence de stabilité suivante pour la charge verticale P :

$$P < 0,5 L \left(K_1 + 2K_2 - \sqrt{K_1^2 + 4K_2^2} \right)$$

ou

$$P > 0,5 L \left(K_1 + 2K_2 + \sqrt{K_1^2 + 4K_2^2} \right)$$

Les figures 8, 9 et 10 illustrent ces résultats pour le cas où :

$L = 400$, $K_1 = 20$, $K_2 = 30$ et $F_1 = F_2 = 40$ (unité : kN cm)

Comme dans l'exemple 1, il est intéressant de remarquer que les valeurs critiques P_{cr1} et P_{cr2} , limites du domaine d'instabilité, sont indépendantes des charges extérieures latérales F_1 et F_2 agissant sur le système et sont donc encore valables pour le cas particulier $F_1 = F_2 = 0$.

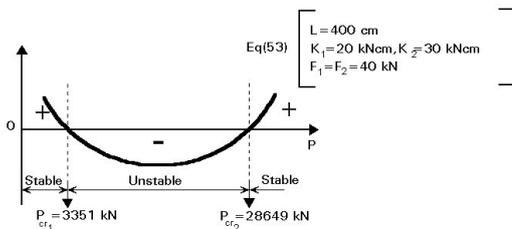


Figure 8 Example of stability of system shown in figure 7

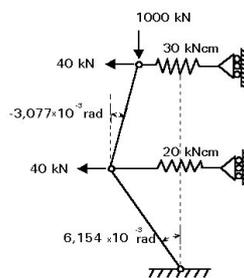


Figure 9 Stable equilibrium configuration for $P < P_{cr1}$

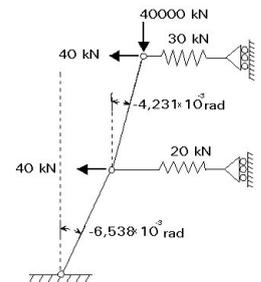


Figure 10 Stable equilibrium configuration for $P > P_{cr2}$

8. CONCLUSION

- L'étude des problèmes de stabilité fait appel à des critères généraux de l'énergie dérivés du principe du travail virtuel et du principe de l'énergie potentielle totale stationnaire ; le premier de ces principes est identique au second pour des systèmes parfaitement conservatifs.
- Toute configuration d'un système peut généralement être décrite par un ensemble de coordonnées généralisées q_i . Si on note V l'énergie potentielle totale du système, une configuration d'équilibre vérifie $\delta^2V = 0$ et la condition de stabilité de cet équilibre est $\delta^2V > 0$; la première et la seconde variation de V sont déterminées pour tout déplacement virtuel δq_i satisfaisant les conditions aux limites.
- Les charges critiques sont calculées à partir de la condition d'équilibre neutre donnée par $\delta^2V = 0 = \text{minimum}$.

9. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Mason J., "*Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1980
2. Richards T.H., "*Energy Methods in Stress Analysis*", Rainbow-Bridge Book Company, 1977
3. Langhaar H.L., "*Energy Methods in Applied Mechanics*", John Wiley and Sons, New York, London, 1962
4. Massonnet C., "*Résistance des matériaux*", Volume, Dunod, Paris, 1963
5. Timoshenko S.P., "*Theory of Elastic Stability*", McGraw Hill Book Company, New York, 1960.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.3

Modes d'instabilité élastique

OBJECTIF

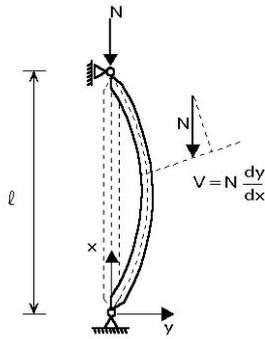
Décrire les modes d'instabilité élastique élémentaires et en déduire les charges critiques principales pour les poteaux, poutres et plaques.

RESUME

Cette leçon explique comment déterminer les charges critiques de flambement à partir de la solution des équations différentielles d'équilibre de la structure. Pour des conditions aux limites et des chargements simples, on calcule ensuite les charges critiques dans les principaux cas, à savoir :

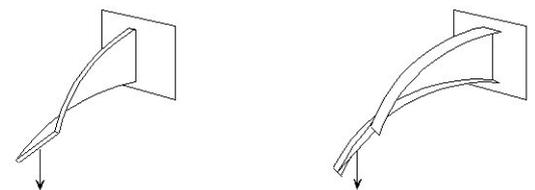
- flambement par flexion des poteaux.
- flambement latéral des poutres.
- voilement des plaques.

1. INTRODUCTION



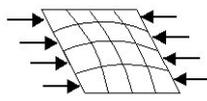
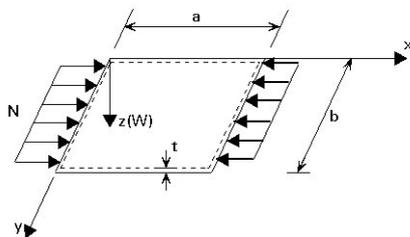
L'instabilité se produit dans tous les systèmes ou éléments soumis à des contraintes de compression. Le type le plus simple de flambement est celui d'une barre initialement rectiligne soumise à de la compression sous l'effet de deux forces axiales opposées (figure 1).

Figure 1 Flexural buckling of columns

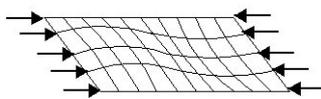


D'autres modes de flambement présentent un grand intérêt pratique pour les constructions en acier, comme par exemple :

- le flambement latéral des poutres (figure 2).



(a) $a/b < \sqrt{2}$



(b) $\sqrt{2} < a/b < \sqrt{6}$

Figure 3 Plate buckling

- le flambement des coques (figure 4).

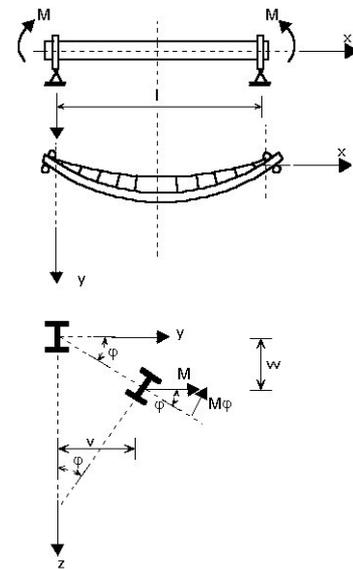


Figure 2 Lateral buckling of beams

- le voilement des plaques (figure 3).

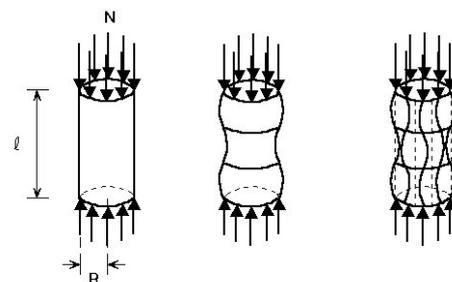


Figure 4 Shell buckling

La figure 5 montre les différences fondamentales de comportement des poteaux, plaques et coques. En ce qui concerne le comportement dans le domaine élastique, la charge critique et la charge maximum supportée par un poteau réel (non parfait) sont relativement en accord. Pour la plaque, si la résistance post-critique est obtenue avec des déplacements latéraux relativement faibles, on peut tolérer une charge plus grande que la charge critique. Cependant, pour des cylindres de faible épaisseur, la charge maximum correspondant à la situation réelle (non parfaite) est beaucoup plus faible que la charge critique théorique.

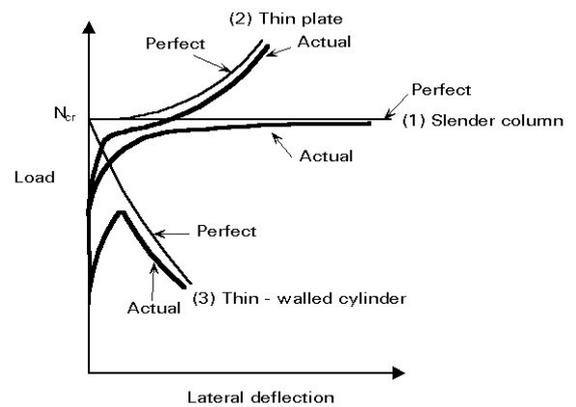


Figure 5 Elastic postbuckling curves for compressed elements



Figure 6 Torsional buckling of a column

Pour des éléments comprimés, le flambement par flexion représenté figure 1 n'est pas le seul mode de flambement. Dans certains cas, par exemple, on peut avoir un flambement par torsion (figure 6) ou une combinaison de flambement par torsion et par flexion ; si un élément est de faible épaisseur (à âme mince) on peut aussi observer un voilement des éléments de la section droite (figure 7) qui peut interagir avec le flambement généralisé de l'élément.

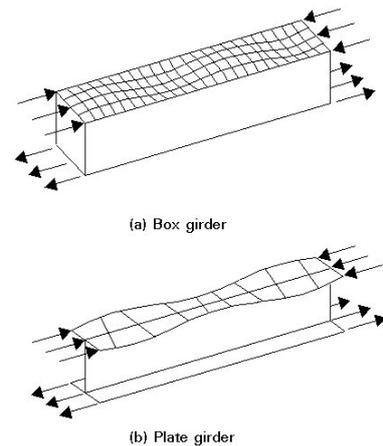


Figure 7 Plate buckling of elements of members

La détermination de la charge critique au moyen de la théorie de la bifurcation tire avantage de l'association de la situation critique avec une condition d'équilibre neutre ; on peut par conséquent déterminer l'équilibre dans une configuration légèrement déplacée, ce qui permet d'arriver à des équations différentielles simples à gérer, au moins pour certaines catégories de structures. La charge critique donne des informations sur le niveau de stabilité d'un système, d'un élément ; elle est aussi utilisée comme valeur de base (limite) pour le calcul de la charge ultime pour des structures présentant un risque d'instabilité, comme on le verra dans les cours ultérieurs. Dans ce cours, les charges critiques sont calculées par l'intermédiaire de la résolution des équations différentielles de l'équilibre décrivant le phénomène. Ces solutions ne correspondent qu'aux cas les plus simples de chargement et de conditions aux limites. Dans la leçon 6.4, on présentera une méthode générale de détermination des charges critiques, basée sur une approche énergétique.

2. FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR FLEXION

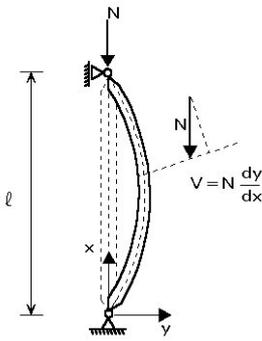


Figure 1 Flexural buckling of columns

A la charge critique, l'équilibre stable du poteau rectiligne se trouve à sa limite et il existe une configuration légèrement déformée du poteau qui peut aussi satisfaire l'équilibre (figure 1). Pour cette configuration, le moment de flexion, à chaque position de la section droite et pour une barre biarticulée, est donné par :

$$M = N y$$

Si l'on utilise l'équation différentielle donnée par la théorie de la flexion simple et en considérant de grands déplacements :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E I_z}$$

$$\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = - \frac{M}{E I_z}$$

ou son approximation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E I_z} \quad (3)$$

qui se révèle suffisamment précise pour des charges voisines de la charge critique et pour de petits déplacements ; si on introduit l'équation (1), on obtient alors :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N y}{E I_z} = 0 \quad (4)$$

où : $E I_z$ représente la rigidité de flexion du poteau dans le plan de flambement.

La solution générale de cette équation est :

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (5)$$

avec :

$$k^2 = \frac{N}{E I_z} \quad (6)$$

(seules les solutions positives, c'est-à-dire les forces de compression, présentent ici un intérêt).

A et B sont des constantes d'intégration qui sont déterminées de manière à satisfaire les conditions aux limites :

$$y = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad (7a)$$

et

$$y = 0 \quad \text{pour } x = \ell \quad (7b)$$

La première condition aux limites donne $B = 0$; la seconde donne :

$$A \sin k\ell = 0 \quad (8)$$

qui impose soit $A = 0$ (pas de déplacement dans ce cas) ou $\sin k\ell = 0$,

soit :

$$k\ell = n \pi \quad (9)$$

avec n entier quelconque.

Finalement, la charge critique s'obtient de la manière suivante :

$$N_{cr, n} = \frac{n^2 \pi^2 E I_z}{\ell^2}$$

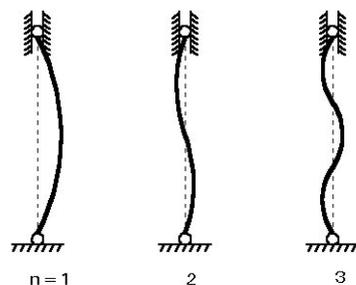


Figure 8 Buckling modes

La figure 8 montre les trois premiers modes de flambement (n = 1, 2 et 3 respectivement).

Normalement, la plus petite valeur de $k\ell$ et donc de la charge critique N_{cr} qui satisfait l'équation (9) est obtenue en prenant $n = 1$; cette charge critique est appelée charge d'Euler ; dans le cas où on utilise un entretoisement, des modes de flambement plus élevés peuvent être déterminants.

La charge critique d'un poteau biarticulé a été calculée par Leonhard Euler, en 1744. D'un point de vue historique, il s'agit de la première solution qui ait été donnée d'un problème de stabilité. La même procédure peut être utilisée pour des cas où les conditions aux limites sont différentes. La charge critique donnée ci-dessus ne prend pas en compte les effets des efforts de cisaillement ; ceci peut être fait en rajoutant la déformation de cisaillement :

$$\gamma = \frac{V}{G A_v} \quad (11)$$

où V est l'effort tranchant donné par :

$$V = N \frac{dy}{dx} \quad (12)$$

et A_v est la section réduite à prendre en compte pour le cisaillement.

Si on ajoute la variation de pente de la déformée due à l'effort tranchant, l'équation différentielle prenant en compte les phénomènes de flambement devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{G A_v} \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{N y}{E I_z} \quad (13)$$

ce qui donne la charge critique :

$$N_{cr}^* = \frac{N_{cr}}{1 + \frac{N_{cr}}{G A_v}} \quad (14)$$

De ce fait, à cause de l'action des forces de cisaillement, la charge critique se trouve réduite par rapport à la charge d'Euler. Pour des poteaux pleins on néglige généralement l'influence du cisaillement ; cependant, pour des éléments en compression en treillis ou à traverses de liaison, cet effet peut prendre une importance pratique et doit alors être considéré.

3. FLAMBEMENT LATÉRAL

Lorsqu'on fléchit une poutre selon son axe de plus forte résistance, elle ne se déplace normalement que dans ce plan. Cependant, si la poutre n'a pas une rigidité latérale suffisante ou des soutiens latéraux pour assurer sa rigidité, elle peut flamber hors du plan de chargement, comme on le voit sur la figure 2.

Pour une poutre droite élastique, il n'y a pas de déplacement hors du plan jusqu'à ce que le moment appliqué atteigne une valeur critique, à ce moment-là la poutre flambe par déplacement latéral et torsion (figure 2) ; le flambement latéral comporte donc de la flexion latérale et de la torsion. Dans le cas le plus simple d'une poutre simplement appuyée doublement symétrique, chargée dans son plan de plus grande rigidité par des moments identiques (figure 2), les équations différentielles de l'équilibre donnent :

- flexion selon l'axe de faible rigidité (ou de faible inertie) :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M \psi}{E I_z}$$

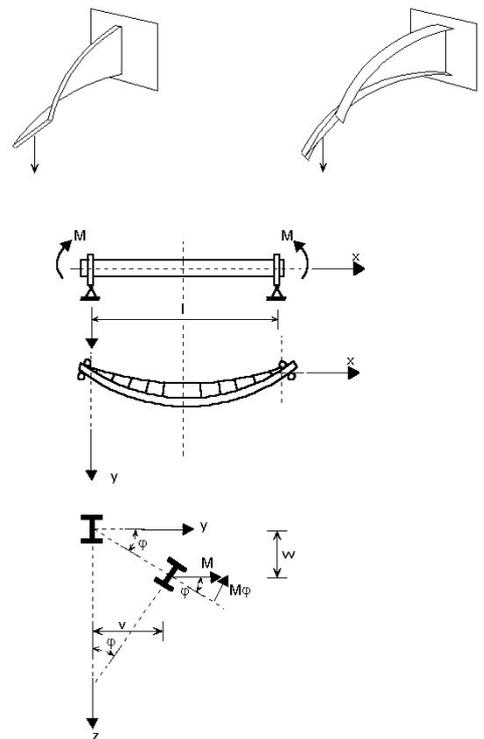


Figure 2 Lateral buckling of beams (15)

- torsion :

$$G I_t \frac{d\psi}{dx} - E I_w \frac{d^3\psi}{dx^3} = M \frac{dv}{dx} \quad (16)$$

- où :
- $E I_z$ représente la rigidité de flexion selon l'axe de faible rigidité
 - $M \psi$ désigne le moment de flexion latéral dû à la torsion, ψ , de la poutre
 - $G I_t$ désigne la rigidité de Saint-Venant en torsion
 - $E I_w$ représente la rigidité de gauchissement
 - $M \frac{dv}{dx}$ est la torsion due au déplacement latéral v .

Lorsque ces deux équations sont vérifiées en tout point de la poutre, la position due à la déformation de flexion et de torsion constitue une position d'équilibre que l'on peut déterminer en différenciant l'équation (16) et en la reportant dans l'équation (15) ; on obtient alors l'équation différentielle du flambement latéral, sous la forme :

$$E I_w \frac{d^4\psi}{dx^4} - G I_t \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{M^2\psi}{E I_z} \quad (17a)$$

ou :

$$C_w \frac{d^4\psi}{dx^4} - C \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{M^2\psi}{E I_z} \quad (17b)$$

Cette expression a été établie pour la première fois par Prandtl, en 1899. La solution générale de cette équation est :

$$\psi = A_1 \sinh k_1 x + B_1 \cosh k_1 x + A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x \quad (18)$$

où :

$$k_1^2 = \frac{C}{2 C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2 C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{E I_z C}} \quad (19)$$

$$k_2^2 = -\frac{C}{2 C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2 C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{E I_z C}} \quad (20)$$

dans laquelle A_1 , A_2 , B_1 et B_2 désignent des constantes d'intégration qui doivent satisfaire les conditions aux limites :

$$\psi = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad (21a)$$

et

$$\psi = 0 \quad \text{pour } x = \ell \quad (21b)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad (22a)$$

et

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \text{pour } x = \ell \quad (22b)$$

Les équations (21) et (22) montrent que, dans le cas d'une poutre dite simplement appuyée, les appuis doivent empêcher à la fois le déplacement latéral et la rotation, mais la section est libre de se gauchir aux extrémités.

Les quatre conditions aux limites donnent :

$$A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (23)$$

et

$$A_2 \sin k_2 \ell = 0 \quad (24)$$

ce qui exige soit $A_2 = 0$ (dans ce cas il n'y a pas de torsion) ou $\sin k_2 \ell = 0$,

c'est-à-dire :

$$k_2 \ell = n \pi \quad (25)$$

où n désigne un entier quelconque.

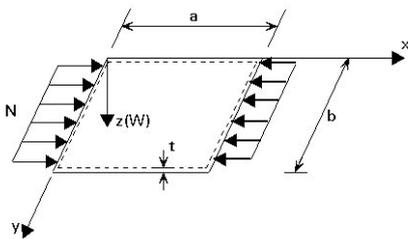
Si on reporte l'équation (25) dans l'équation (20) et après réarrangement, la plus petite valeur de $k_2 \ell$ donne le moment critique pour la poutre :

$$M_{cr} = \frac{\pi \sqrt{E I_z C}}{\ell} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 C_w}{\ell^2 C}} \quad (26)$$

4. VOILEMENT DES PLAQUES

L'exemple le plus simple de ce phénomène est celui d'une plaque rectangulaire à quatre côtés, simplement appuyée (les déplacements hors du plan sont empêchés, mais les rotations sont libres), chargée en compression comme le montre la figure 3. Comme pour les éléments en compression, la plaque reste plane jusqu'à ce que la charge appliquée atteigne une valeur critique, au-delà de laquelle elle flambe avec déplacements latéraux

L'équation différentielle du flambement d'une plaque, établie par Bryan en 1891, donne, pour le cas représenté figure 3 :



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (27)$$

où D représente la rigidité en flexion de la plaque :

$$D = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (28)$$

La solution générale de cette équation est :

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (29)$$

qui satisfait les conditions aux limites :

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad (30a)$$

et :

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = a$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

$$\text{et :} \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = b \quad (31b)$$

Si on reporte l'équation (29) dans l'équation (27), on obtient :

$$N = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (32)$$

où m et n désignent le nombre de demi-ondes respectivement dans les directions x et y .

La plus petite valeur de N et donc la charge critique N_{cr} , sera obtenue en prenant $n = 1$. Ceci montre que la plaque flambe d'une manière telle qu'il peut y avoir plusieurs demi-ondes dans la direction de la compression, mais une seule dans la direction perpendiculaire. Donc, l'expression de la charge critique devient :

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (33)$$

où

$$k = \left(\frac{b m}{a} + \frac{a}{b m} \right)^2$$

Si la plaque flambe en une demi-onde, alors $m = 1$ et k prend sa valeur minimale (égale à 4) quand $a = b$, c'est-à-dire pour une plaque carrée.

De la même manière, si la plaque flambe en deux demi-onde, alors $m = 2$ et k atteint sa valeur minimale (aussi égale à 4) pour $a = 2 b$.

Si l'on suppose de la même manière que $m = 3, 4, \dots$ on obtient une série de courbes représentées sur la figure 9. Il est intéressant de noter que, pour les valeurs $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \dots$ du rapport a/b , il y a coïncidence de deux modes de flambement.

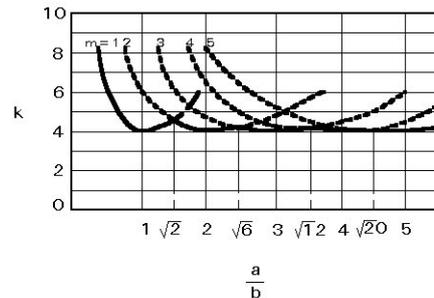


Figure 9 Relationships between k and the ratio a/b of a plate

5. CONCLUSION

- Pour des éléments en compression tels que poteaux, poutres, plaques et coques, la charge critique est la valeur limite supérieure correspondant à la charge ultime d'un élément réel (non parfait).
- La charge critique est associée à la condition d'équilibre neutre de l'élément.
- Dans des cas simples, les charges critiques peuvent être calculées en résolvant les équations différentielles d'équilibre qui décrivent le phénomène.

6. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Timoshenko, S.P. et Gere, J.M., "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, 2nd edition, New York, 1961.
2. Allen, H.G. et Bulson, P.S., "*Background to Buckling*", McGraw-Hill, London, 1980.
3. Shanley, F.R., "*Strength of Materials*", McGraw-Hill, New York, 1957.
4. Murray, N.W., "*Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*", Clarendon Press, Oxford, 1984.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.4

Méthodes générales de détermination des charges critiques

OBJECTIF

Expliquer les méthodes énergétiques de détermination des charges critiques pour les cas pour lesquels il n'est pas possible d'obtenir une forme générale de solution aux équations différentielles de l'équilibre.

RESUME

Lorsque l'on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé au mode de flambement, le système élastique peut être approché par l'utilisation de paramètres adéquats et modifiables, déterminés de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. L'utilisation de ce concept permet d'en déduire des méthodes pratiques approchées, très utiles à l'ingénieur de conception ; quelques-unes de ces méthodes, parmi les plus connues sont présentées dans ce cours, comme les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin. On donnera aussi une présentation rapide de quelques méthodes numériques, comme par exemple la méthode des différences finies d'Euler et la méthode des éléments finis.

1. INTRODUCTION

Les charges critiques de stabilité peuvent être déterminées en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- résolution directe des équations différentielles de l'équilibre, avec comme résultats les valeurs exactes des charges critiques,
- l'utilisation de méthodes approchées qui sont, pour la plupart d'entre elles, basées sur des méthodes énergétiques et qui conduisent à des solutions approchées des problèmes de flambement.

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible ; c'est le cas des problèmes présentés et résolus, de cette manière, dans la leçon 6.3. Ce n'est plus cette approche, cependant qui sera prise en compte dans ce cours, celui-ci se focalisant plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives mentionnées précédemment. Il faut noter que l'on peut aussi utiliser des méthodes itératives puissantes pour résoudre les problèmes de stabilité ; on verra certaines de ces méthodes dans la leçon 6.5.

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats et modifiables ou des coordonnées généralisées, déterminées de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées, très utiles à l'ingénieur de pratique ; on présentera ici les plus connues de ces méthodes, à savoir les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin. On donnera aussi une présentation rapide de quelques méthodes numériques, comme par exemple la méthode des différences finies d'Euler et la méthode des éléments finis.

Si l'on choisit judicieusement les paramètres ajustables mentionnés ci-dessus et en nombre adéquat (dans le cas de l'approximation d'un système continu), ces méthodes approchées donnent des résultats très proches de la solution exacte, au prix d'un effort de calcul plus important.

2. APPLICATION DES METHODES ENERGETIQUES GENERALES AUX SYSTEMES ELASTIQUES

Les méthodes énergétiques de résolution des problèmes de stabilité élastique sont basées sur le principe de l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale à l'équilibre neutre (voir leçons 6.1 et 6.2).

Il est établi que : si on considère le changement ΔV de l'énergie totale V d'un système, d'une configuration d'équilibre de départ à une configuration voisine définie par un déplacement virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible, alors la condition d'équilibre neutre est gouvernée par la deuxième variation $\delta^2 V$ de l'incrément ΔV , c'est-à-dire :

$$\delta^2 V = 0 = \text{minimum} \quad (1)$$

Généralement, quand on considère des structures en acier, on étudie la stabilité d'une structure sous un ensemble de charges extérieures en prenant en compte une déformation de flambement, f , depuis une configuration de départ et en faisant les calculs conformément à l'équation (1), soit pour vérifier la stabilité de la configuration de départ, soit pour déterminer les valeurs critiques des charges extérieures conduisant à l'instabilité. La déformation f est exprimée comme une fonction de une ou plusieurs variables indépendantes (généralement les coordonnées cartésiennes) ; par exemple, $f(x)$ en tant que déformée d'une poutre ou $f(x,y)$ comme déformée d'une plaque. Le changement de déformation d'un

système à l'équilibre neutre - la déformation de flambement ou le mode de flambement - sera désormais noté $f(X)$, où X représente le champ de coordonnées du système de référence utilisé (une, deux ou trois dimensions). la fonction f peut être continue si le système est continu ou peut être définie par morceaux si le système est discret.

La résolution de l'équation (1) nécessite l'évaluation de la fonction potentiel δ^2V par rapport à la fonction f , à l'intérieur d'un domaine d'intégration noté D (longueur, pour une poutre, surface, pour une plaque, par exemple). Généralement δ^2V comprend des quantités quadratiques et homogènes de la déformation de flambement $f(X)$ et ses dérivées et constitue une fonction linéaire des charges extérieures appliquées. Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si on définit un chargement de référence S_1 (correspondant à $\alpha = 1$), la charge à chaque instant d'une histoire linéaire du chargement est égale à :

$$S = \alpha S_1 \quad (2)$$

Alors, d'une manière générale, la fonction δ^2V peut être évaluée par :

$$\delta^2V(f) = \int_D F(\alpha, X, f, f', f'') dD = 0 \quad (3)$$

où la fonction F comporte aussi les caractéristiques géométriques et du matériau du domaine.

La résolution de l'équation (3) par rapport à f conduit à la détermination des valeurs des charges (par le coefficient multiplicateur α) à l'équilibre neutre, c'est-à-dire les valeurs critiques des charges au-delà desquelles la configuration de départ devient instable.

3. COEFFICIENT DE RAYLEIGH

La méthode de calcul des charges critiques par le coefficient de Rayleigh découle directement de l'équation (1) ; la seconde variation δ^2V de l'énergie potentielle totale peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \delta^2\Omega(f, S) \quad (4)$$

- où :
- δ^2U est la deuxième variation de l'énergie de déformation (fonction homogène et quadratique de f) ; elle représente l'énergie de déformation correspondant au mode de flambement ;
 - $\delta^2\Omega$ est la deuxième variation de l'énergie potentielle due aux charges extérieures S (fonction linéaire de S et fonction quadratique et homogène de f). Elle représente l'opposé du travail des forces extérieures correspondant au mode de flambement.

A l'équilibre neutre, α (voir équation (2)) prend la valeur particulière α_{cr} qui est le facteur multiplicateur de charge critique au-delà duquel se développe l'instabilité. Les équations (1), (2) et (4) donnent :

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \alpha_{cr} \delta^2\Omega(f, S_1) = 0 \quad \text{minimum} \quad (5)$$

Si l'on connaît la déformation de flambement f , le facteur multiplicateur de charge critique peut être obtenu à partir de l'équation (4), soit :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\delta^2U(f)}{\delta^2\Omega(f, S_1)} \quad (6)$$

Considérons maintenant une approximation f_1 de f (f_1 étant différente de f), α_{cr} étant connu. On a alors, à cause de la condition du minimum :

$$\delta^2V(f_1) = \delta^2U(f_1) + \alpha_{cr} \delta^2\Omega(f_1, S_1) > 0 \quad (7)$$

Les équations (5) et (7) donnent :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} < - \frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \quad \text{quel que soit } f_1 \neq f \quad (8)$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_{cr} < \min \left[- \frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \right] \quad \text{quel que soit } f_1 \neq f \quad (9)$$

Ceci définit le Principe de Rayleigh qui établit que le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} , calculé en utilisant l'équation (6) avec un déplacement cinématiquement admissible quelconque différent de la vraie déformation de flambement, donnera une valeur de α_{cr} supérieure à la valeur exacte.

En supposant que $f_1 = f + \varepsilon f_2$, avec f_2 un déplacement cinématiquement admissible quelconque et ε une constante, on a :

$$\alpha_{cr1} = - \frac{\delta^2 U(f + \varepsilon f_2)}{\delta^2 \Omega(f + \varepsilon f_2, S_1)} = - \frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} + 0(\varepsilon^2) = \alpha_{cr} + 0(\varepsilon^2)$$

où $0(\varepsilon^2)$ représente une quantité en ε^2 . Ceci implique qu'une erreur du premier ordre dans le choix de f donne une erreur du second ordre pour la valeur de α_{cr} . Si l'on fait les calculs en utilisant l'équation (6) avec une bonne fonction d'approximation f , simplement nécessaire pour satisfaire les conditions aux limites, on peut obtenir une valeur précise de α_{cr} , avec une erreur par excès.

4. METHODE DE RAYLEIGH-RITZ

La méthode de Rayleigh-Ritz suppose que la solution exacte $f(X)$ du problème variationnel décrit par l'équation (3) peut être approchée par une combinaison linéaire de « fonctions de coordonnées » correctement choisies $\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)$, soit :

$$f_n(X) = q_1 \Phi_1(X) + q_2 \Phi_2(X) + \dots + q_n \Phi_n(X) \quad (11)$$

où les q sont des constantes à déterminer et qui doivent être considérées comme les coordonnées généralisées (degrés de liberté) du système.

Quand $f(X)$ est approchée ainsi par $f_n(X)$, la fonction $\delta^2 V$, à évaluer, devient une fonction quadratique et homogène des q ; l'équation (3) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\delta^2 V = \{q\}^t [a] \{q\} = 0 \quad (12)$$

où $\{q\}$ représente le vecteur des q et $[a]$ une matrice dont les coefficients a_{ij} sont :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (13)$$

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions du facteur multiplicateur de charge α et des propriétés du système.

Si l'on considère le cas de configurations non triviales, $\{q\} \neq 0$, l'équation (12) de l'équilibre neutre nécessite que $[a]$ soit une matrice singulière, c'est-à-dire que son déterminant doit être nul. Cette condition fournit une équation en α , de degré n , dont la valeur positive la plus petite peut être considérée comme le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} .

Les fonctions Φ_i sont choisies par avance, selon la connaissance et les hypothèses faites sur la nature de la déformation. Elles ne sont pas inconnues, et, à condition qu'elles satisfassent les conditions aux limites forcées (ou géométriques) pour chaque valeur de q , le choix des « formes » est arbitraire. On peut noter, cependant, que l'efficacité de la méthode dépend du caractère judicieux du choix fait pour les Φ et que c'est un avantage si elles satisfont toutes les conditions aux limites : dans les applications pratiques, on

aura une idée de la nature générale de la solution réelle $f(X)$, de telle sorte que la question d'utiliser des formes « excessives » pour les Φ se pose rarement. Si les fonctions sont judicieusement choisies, on peut obtenir une très bonne précision avec relativement peu de fonctions. L'efficacité du procédé de Rayleigh-Ritz peut être considérablement améliorée si, en plus des conditions aux limites forcées (ou géométriques) (concernant les translations ou les rotations aux supports, c'est-à-dire f et f'), on vérifie aussi les conditions aux limites naturelles (ou mécaniques) (concernant la courbure, c'est-à-dire f'').

Pour avoir une idée de la précision des résultats, on peut faire appel à une procédure plus élaborée pour obtenir une séquence d'approximations successives ; on peut alors prendre l'expression suivante en première approximation :

$$f_1(X) = q_1 \Phi_1(X) \quad (14)$$

et comme seconde approximation :

$$f_2(X) = q_1' \Phi_1(X) + q_2' \Phi_2(X) \quad (15)$$

Il en est de même des approximations suivantes.

La comparaison de solutions successives donne une indication sur la précision de la solution en cours. Il est intéressant de noter que la solution $f_{i+1}(X)$ sera toujours meilleure ou au moins pas pire, que la solution précédente $f_i(X)$.

5. METHODE DE GALERKIN

En contraste avec la méthode de Rayleigh-Ritz qui donne une solution après avoir écrit le problème variationnel, la méthode de Galerkin fournit directement les solutions approchées des équations différentielles et elle s'applique que l'on puisse ou non écrire la transformation sous la forme d'un problème variationnel. Elle semble donc s'appliquer plus largement que la technique de Rayleigh-Ritz et est plus attractive en pratique dans la mesure où elle ne nécessite pas de déterminer une fonction potentiel. On peut démontrer, cependant, que les deux méthodes sont étroitement reliées. La méthode de Galerkin procède de la manière suivante.

Généralement, l'équation différentielle gouvernant un problème de flambement peut s'écrire :

$$L[f(X)] = 0 \quad (16)$$

où : $f(X)$ représente la déformation de flambement et L un opérateur différentiel linéaire et homogène.

Supposons que la solution exacte $f(X)$ de l'équation (16) puisse s'exprimer sous la forme d'une série de fonctions complète :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Phi_j(X) \quad (17)$$

satisfaisant toutes les conditions aux limites ; l'« exactitude » de cette solution peut être établie en déclarant que la partie gauche de l'équation (16) est orthogonale à chaque terme dans la série de l'équation (17), soit :

$$\int_D L[f(X)] \Phi_j(X) dD = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Supposons que la série de l'équation (17) soit tronquée à un nombre fini de termes, n , ensuite, au moyen de l'idée ci-dessus, on peut imposer n conditions d'orthogonalité, de la manière suivante :

$$\int_D L \left[\sum_{j=i}^n q_j \Phi_j(X) \right] \Phi_i(X) dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Ceci peut être encore écrit de la manière suivante, car L est un opérateur linéaire :

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_D L[\Phi_j(X)] \Phi_i(X) dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19')$$

Ceci fournit une base moyenne d'évaluation des n inconnues q, telles que :

$$f_n(X) = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j(X) \quad (20)$$

ce qui constitue une solution approchée de l'équation différentielle.

La partie gauche de l'équation (19) qui comprend les propriétés du système et les charges extérieures par l'intermédiaire du coefficient multiplicateur de charge α , est quadratique et homogène en q ; cette équation peut s'écrire sous la forme de l'équation (11), puis traitée de la même manière que pour la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver les charges critiques.

6. METHODES NUMERIQUES

Les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation d'un ordinateur peuvent être utilisées pour déterminer des charges critiques. On décrira ici rapidement la méthode des différences finies d'Euler et la méthode des éléments finis (MEF).

6.1. Méthode des différences finies d'Euler

Dans la méthode de Rayleigh-Ritz, il est nécessaire que les fonctions admissibles soient continûment différentiables dans le domaine d'intégration. Le domaine admissible peut être étendu si l'on admet des fonctions qui ont des dérivées continues par morceaux. La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste donc à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous-domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous-domaine. Si on note f_i la valeur de la fonction f à la frontière entre les intervalles i et $i+1$, les dérivées de f peuvent être exprimées comme des fonctions de f et la somme de la deuxième variation de l'énergie sur tous les intervalles est aussi une fonction de f . On peut considérer ici les f comme les q de la méthode de Rayleigh-Ritz ; la figure 1a illustre cette approche.

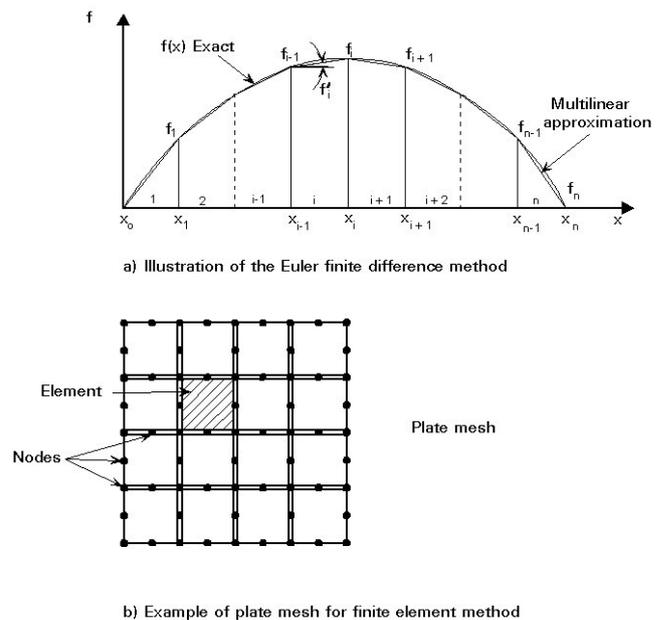


Figure 1 Types of numerical model

6.2. Méthode des éléments finis

Cette méthode est utilisée en particulier pour résoudre des problèmes de stabilité de structures de type plaques ou coques. La résolution des problèmes de voilement de plaques au moyen de la théorie des éléments finis a vu sa popularité s'accroître car elle utilise une formulation matricielle convenant aux traitements par ordinateurs. La méthode des éléments finis a le caractère d'un « morceau » de la technique de Rayleigh-Ritz ; la plaque est « découpée » en un nombre d'éléments plats reliés seulement en des nœuds spécifiques, la continuité et l'équilibre étant écrits en ces nœuds. Un grand nombre de petits éléments donnent une structure virtuellement continue, dont le comportement ressemble à celui d'une plaque complète. On peut prendre en compte sans problème des conditions aux limites de toutes sortes

simultanément et des variations de rigidité de flexion. On peut analyser des structures complètes, il est aussi possible de rechercher des comportements post-critique. Un exemple de maillage de plaque est présenté sur la figure 1b .

7. QUELQUES ENERGIES DE DEFORMATION TYPIQUES

Les expressions de l'énergie de déformation sont nécessaires aux calculs que l'on fait au moyen des différentes méthodes énergétiques. On donne ci-dessous quelques expressions de l'énergie de déformation utiles typiques pour des éléments de structures tels que barres et plaques. Ces expressions font apparaître le changement d'énergie de déformation correspondant à la déformation de flambement.

7.1 Eléments barres

7.1.1 Notation

L	longueur de l'élément
E	module de Young
G	module de cisaillement
A	section droite
A_v	section réduite
I	moment d'inertie de flexion
I_w	constante de gauchissement
I_t	constante de torsion
x	abscisse le long de l'élément (origine prise au début de l'élément)
u(x)	allongement axial de l'élément à l'abscisse x
w(x)	déflexion latérale de l'élément à l'abscisse x
$\theta(x)$	penne due à la courbure seule de l'élément à l'abscisse x
$\psi(x)$	angle de cisaillement ($dw/dx - \theta(x)$) de l'élément à l'abscisse x
$\phi(x)$	angle de torsion de l'élément à l'abscisse x

7.1.2 Energie de déformation

$$\text{Allongement :} \quad \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (21)$$

$$\text{Flexion :} \quad \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (22)$$

$$\text{Torsion :} \quad \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L G I_t \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\text{Cisaillement :} \quad \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L G A_v \psi^2 dx \quad (24)$$

$$\text{Gauchissement :} \quad \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E I_w \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx \quad (25)$$

7.2 Plaques minces

7.2.1 Notation

a	dimension de la plaque le long de l'axe x
b	dimension de la plaque le long de l'axe y
t	épaisseur de la plaque
x,y	coordonnées cartésiennes d'un point quelconque (origine prise à un angle de la plaque)
w(x,y)	flèche
D	raideur de la plaque = $\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$
ν	coefficient de Poisson

7.2.2 Energie de déformation

Flexion :

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} D \iint_{00}^{ab} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (26)$$

8. EXEMPLE FAISANT APPEL AUX DIFFERENTES METHODES

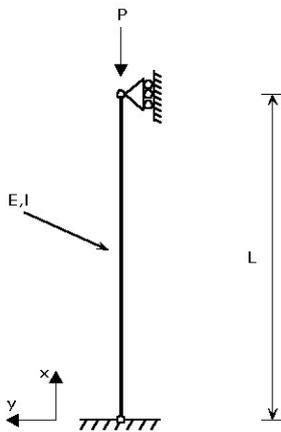


Figure 2 Pin-ended column

La déformation de flambement de l'élément est représentée figure 3.

On s'intéresse au flambement par flexion d'un élément en compression ; la charge critique est déterminée en utilisant le coefficient de Rayleigh, les méthodes de Rayleigh-Ritz et de Galerkin.

L'élément en compression faisant l'objet de l'étude est représenté sur la figure 2 : il est articulé et le déplacement latéral empêché aux extrémités ; On note respectivement L, I et E la longueur de l'élément, le moment d'inertie de flexion de la section et le module de Young ; charge P agit verticalement vers bas ; il s'agit de déterminer la valeur critique P_{CR} de P ; la

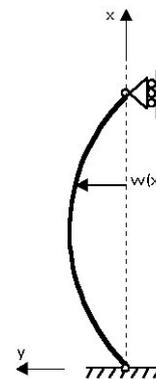


Figure 3 Fundamental buckling mode for pin-ended column

est
la
le

8.1 Méthode du coefficient de Rayleigh

On choisit l'expression ci-dessous comme approximation du déplacement de flambement w(x) :

$$w(x) = a (x^2 - xL) \quad (27)$$

avec a constante non nulle quelconque qui satisfait les conditions aux limites $w = 0$ pour $x = 0$ et $x = L$.

Les dérivées sont :

$$\frac{dw}{dx} = 2ax \quad \text{et} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 2a \quad (28)$$

Si l'on intègre selon l'équation (22), la variation de l'énergie de déformation pour la déformation de flambement est :

$$\delta^2 U = 2 a^2 E I L \quad (29)$$

La variation de l'énergie potentielle de P est l'opposée du travail fait par P pour la déformation de flambement. Le déplacement vertical du point d'application de P dû à la déformation de flexion est donné par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (30)$$

et la variation de l'énergie potentielle de la charge extérieure donne, après l'intégration de l'équation (30) :

$$\varepsilon^2 \Omega = - P \varepsilon = - \frac{P a^2 L^3}{6} \quad (31)$$

Le coefficient multiplicateur de charge critique est obtenu par l'équation (6), soit :

$$\alpha_{cr} = \frac{2 a^2 E I L}{P a^2 L^3} = \frac{12 E I}{P L^2} \quad (32)$$

et, à partir de l'équation (2), la valeur critique P_{cr} vaut :

$$P_{cr} = 12 \frac{E I}{L^2} \quad (33)$$

Cette valeur doit être comparée à la valeur exacte obtenue avec le déplacement de flambement exact :

$$w(x) = a \sin \pi x / L$$

c'est-à-dire :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E I}{L^2} = 9,8696 \frac{E I}{L^2} \quad (34)$$

Ceci montre qu'un déplacement de flambement parabolique ne constitue pas une très bonne approximation du mode de flambement exact. Si on choisit comme approximation la déformée d'une poutre simplement appuyée sous charge uniformément distribuée, c'est-à-dire :

$$w(a) = a \left(x^4 - 2 x^3 L + x L^3 \right) \quad (35)$$

les calculs ci-dessus donnent :

$$P_{cr} = 9,88 \frac{E I}{L^2} \quad (36)$$

ce qui est très proche de la valeur exacte donnée par l'équation (34).

8.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Pour simplifier les calculs, on prend l'origine de l'abscisse à mi-longueur de l'élément (voir figure 4). On choisit un déplacement de flambement qui est une combinaison linéaire des deux fonctions de coordonnées suivantes :

$$\Phi_1(x) = x^2 - \frac{L^2}{4}$$

$$\Phi_2(x) = x^4 - \frac{L^4}{16}$$

qui satisfont toutes deux les conditions aux limites $w = 0$ pour $x = -L/2$ et $x = L/2$.

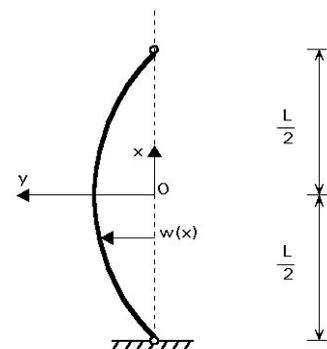


Figure 4 Notation for pin-ended column

L'expression du déplacement de flambement est alors :

$$w(x) = a \Phi_1(x) + b \Phi_2(x) = a \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) + b \left(x^4 - \frac{L^4}{16} \right) \quad (39)$$

Ses dérivées sont :

$$\frac{dw}{dx} = 2 a x + 4 b x^3 \quad \text{et} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 2 a + 12 b x^2 \quad (40)$$

La variation de l'énergie de déformation est exprimée par :

$$\delta^2 U = 2 \frac{1}{2} \int_0^{L/2} E I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx = E I \left(2 a^2 L + \frac{9}{10} b^2 L^5 + 2 a b L^3 \right) \quad (41)$$

La variation de l'énergie potentielle due à la charge de compression est :

$$\delta^2 \Omega = -2 \frac{1}{2} P \int_0^{L/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = -P \left(\frac{1}{6} a^2 L^3 + \frac{1}{56} b^2 L^7 + \frac{1}{10} a b L^5 \right) \quad (42)$$

et les équations (4), (41) et (42) donnent :

$$\delta^2 V = a^2 \left(2EIL - \frac{PL^3}{6} \right) + b^2 \left(\frac{9EIL^5}{10} - \frac{PL^7}{56} \right) + ab \left(2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \right) \quad (43)$$

Les dérivées nécessaires sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} &= 4EIL - \frac{PL^3}{3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} &= \frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} &= 2 E I L^3 - \frac{PL^5}{10} = \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial a} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

et la matrice [a] de l'équation (22) est :

$$[a] = \begin{bmatrix} 4EIL - \frac{PL^3}{3} & 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \\ 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} & \frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Son déterminant est donné par :

$$\text{Dét}[a] = \left(4EIL - \frac{PL^3}{3} \right) \left(\frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \right) - \left(2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \right)^2 \quad (46)$$

La plus petite solution positive de $\text{Dét}[a] = 0$ est :

$$P_{cr} = 9,875 \frac{EI}{L^2} \quad (47)$$

qu'il faut comparer à la valeur exacte donnée par l'équation (34). Bien que les fonctions de coordonnées (37) et (38) ne constituent pas individuellement de réelles bonnes approximations du mode exact de flambement, leur combinaison (2 degrés de liberté) donne des résultats satisfaisants.

8.3 Méthode de Galerkin

On choisit la même approximation de la déformation de flambement et la même convention de signe pour

les coordonnées que pour la méthode de Rayleigh-Ritz :

$$w(x) = a \Phi_1(x) + b \Phi_2(x) \quad (39)$$

où
$$\Phi_1(x) = x^2 - L^2/4 \quad (37)$$

$$\Phi_2(x) = x^4 - L^4/16 \quad (38)$$

qui satisfont toutes deux les conditions aux limites nécessaires qui sont

$$w = 0 \text{ pour } x = -L/2 \text{ et } x = L/2$$

(pas de condition imposée pour les rotations d'extrémités).

On a vu dans ce même cours que l'équation différentielle gouvernant le flambement par flexion d'un élément en compression était donnée par :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0 \quad (48)$$

Le système d'équations obtenu à partir de l'équation (19') est :

$$2a \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + P \Phi_1 \right) \Phi_1 dx + 2b \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + P \Phi_2 \right) \Phi_1 dx = 0 \quad (49)$$

$$2a \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + P \Phi_1 \right) \Phi_2 dx + 2b \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + P \Phi_2 \right) \Phi_2 dx = 0$$

Les dérivées nécessaires sont :

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} = 2 \text{ et } \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} = 12 x^2$$

Après intégration, on obtient le système suivant :

$$a \left[\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right] + b \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right] = 0 \quad (50)$$

$$a \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right] + b \left[\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right] = 0$$

Il existe une solution non-triviale si le déterminant de l'équation (50) est égal à zéro, soit :

$$\left(\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right) \left(\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right) - \left(\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right)^2 = 0 \quad (51)$$

dont la solution la plus petite vaut :

$$P_{cr} = 9,8697 \frac{EI}{L^2} \quad (52)$$

qui est presque égal à la valeur exacte donnée par l'équation (34).

9. CONCLUSION

- Il existe des méthodes énergétiques approchées qui fournissent à l'ingénieur les moyens pratiques de déterminer les chargements critiques pour la plupart des problèmes de stabilité ; ces méthodes font des hypothèses sur la nature de la déformation de flambement du système élastique, incorporant des paramètres ajustables déterminés de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre.

- Le coefficient de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin présentés dans ce document sont des méthodes bien connues qui peuvent généralement être appliquées manuellement à des problèmes simples de flambement d'éléments de structures isolés sous des charges élémentaires.
- Lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, ces méthodes requièrent généralement un traitement informatique, comme le font les méthodes des différences finies d'Euler et des éléments finis.
- On peut trouver dans la littérature technique plusieurs autres méthodes d'analyse ; on en décrira l'une d'elles qui comporte des procédures itératives, dans la leçon 6.5.

10. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Richards, T.H., "*Energy Methods in Stress Analysis*", Rainbow-Bridge Book Company, 1977.
2. Mason J., "*Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1980.
3. Langhaar H.L., "*Energy Methods in applied Mechanics*", John Wiley & Sons, New York, London, 1962.
4. Timoshenko S., "*Theory of Elastic Stability*", McGraw Hill Book Company, New York, 1960.
5. Massonnet C., "*Résistance des Matériaux*" - Volume 2, Dunod, Paris, 1963.
6. Bleich, F., "*Buckling Strength of Metal Structures*", McGraw Hill Book Company, New York, 1952.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.5

Méthodes itératives de résolution des problèmes de stabilité

OBJECTIF

Présenter et illustrer l'application des méthodes que l'on peut utiliser pour résoudre les problèmes de stabilité de manière itérative.

RESUME

Cette leçon commence par une introduction qui décrit les raisons de l'utilisation de méthodes itératives pour résoudre des problèmes de stabilité. Puis on introduit la méthode de Vianello. Ensuite, on passe en revue la méthode de Newmark de calcul des forces intérieures et déplacements dans des poutres chargées transversalement, comme une étape préliminaire préalable à la présentation de la méthode de Vianello-Newmark. Cette méthode combine la méthode de Vianello et la procédure d'intégration de Newmark.

1. INTRODUCTION

Même lorsque l'on suppose les déplacements petits, les problèmes de stabilité sont toujours non linéaires, dans le sens que les équations d'équilibre et les conditions aux limites doivent être établies dans la configuration déformée de la structure. Le résultat est que, pour des cas très simples seulement, on peut obtenir des solutions analytiques du problème aux valeurs propres - vecteurs propres, conduisant à la détermination de la charge critique et du mode de flambement correspondant d'instabilité (voir leçon 6.3). En général, il est nécessaire de recourir à des méthodes approchées. On a présenté dans la leçon 6.4 un groupe très important de ces méthodes, les méthodes énergétiques. Fondamentalement, ces méthodes consistent à remplacer la structure continue d'origine par une structure discrète plus simple. Ceci est réalisé en contraignant la structure réelle à se déformer d'une manière que l'on peut décrire sous la forme de la superposition d'un ensemble de formes définies, avec des amplitudes non spécifiées. La charge critique exacte et le mode de flambement de cette structure simple, solution d'un problème aux valeurs propres - vecteurs propres analogue à celui traité dans la leçon 6.2, sont des solutions approchées de la structure d'origine. Bien que la précision de ces méthodes (et l'effort investi) augmente avec le nombre de degrés de liberté considérés, on peut souvent avoir des approximations assez satisfaisantes en n'en considérant qu'un petit nombre. Un des principaux inconvénients des méthodes énergétiques est qu'elles conduisent toujours aux limites supérieures de la charge critique de flambement, ce qui n'est pas pratique en conception. La procédure de discrétisation d'une structure continue peut aussi être réalisée en divisant cette structure en plusieurs éléments rigides reliés au moyen de ressorts lui fournissant sa rigidité. La déformation de la structure est une fonction continue par morceaux, complètement définie par les déplacements des nœuds reliant les éléments. La solution exacte de cette structure discrétisée a été vue dans la leçon 6.2 et constitue aussi une solution approchée du problème initial. Cependant, dans ce cas, on ne peut rien dire concernant la valeur ou le signe de l'erreur. Comme auparavant, la précision augmente avec le nombre des éléments.

La détermination de la charge critique et du mode de flambement d'une structure nécessite la résolution d'un problème non-linéaire qui est soit un problème aux valeurs propres - vecteurs propres linéaire (systèmes discrets ou discrétisés) soit un problème aux valeurs propres - fonctions propres linéaire (systèmes continus). Dans le premier cas, on peut toujours trouver une solution analytique, mais il faut déterminer la racine la plus petite de l'équation caractéristique qui est souvent d'un degré relativement élevé. Dans le second cas, une solution analytique n'est possible que pour les problèmes simples. Une alternative à l'un ou l'autre de ces problèmes est fournie par une méthode itérative introduite en premier lieu par Vianello et appelée, de ce fait, méthode de Vianello. L'idée de base consiste à remplacer la solution du problème non-linéaire par la solution d'une suite de problèmes linéaires dont on peut montrer qu'elle converge vers le mode critique de flambement et permet le calcul de la charge critique de flambement. Une des caractéristiques de la méthode de Vianello, très pratique pour la conception et la vérification de la sécurité des structures, est qu'il est possible, à l'issue de chaque itération, de calculer les limites supérieure et inférieure de la charge critique de flambement et donc d'estimer l'erreur correspondante.

Enfin, la méthode de Vianello-Newmark combine le concept de la méthode de Vianello et la technique d'intégration numérique de Newmark. Elle constitue une alternative très efficace pour la détermination des charges critiques de flambement et des modes pour des poteaux chargés axialement, en particulier si les charges, le poteau ou ses conditions de liaison présentent des caractéristiques non-standard. On peut aussi utiliser cette méthode pour déterminer les configurations d'équilibre de poteaux sur lesquels agissent des charges axiales données et qui présentent des imperfections géométriques initiales ou des charges transversales (par exemple poutres - poteaux).

2. METHODE DE VIANELLO

La méthode de Vianello est une procédure itérative que l'on peut utiliser pour déterminer approximativement la charge critique et le mode de flambement pour des structures réelles continues ou discrètes sur lesquelles agissent un ensemble de charges que l'on peut exprimer en termes d'un paramètre de chargement unique λ (chargement proportionnel). Cette méthode est directement basée sur l'équation différentielle (système d'équations simultanées) de l'équilibre du système, ce qui signifie qu'elle ne prend pas en compte les concepts énergétiques. L'application de cette méthode consiste en les étapes suivantes :

- (i) Faire une estimation initiale de la configuration déformée associée au mode critique de flambement de la structure, satisfaisant les conditions aux limites en déplacements (cinématiquement admissible). Cette estimation initiale est un vecteur (pour les systèmes discrets) ou une fonction (pour les systèmes continus).
- (ii) Sur la base de cette configuration supposée, calculer les forces intérieures en termes de paramètre de charge de flambement, λ , inconnu. Ces forces intérieures sont des forces concentrées et/ou des couples (systèmes discrets) ou des moments fléchissants (systèmes continus).
- (iii) En utilisant une analyse linéaire standard, déterminer la configuration déformée due aux forces intérieures calculées en (ii). Cette nouvelle configuration déformée qui dépend de λ , constitue une meilleure approximation du mode critique de flambement de la structure. L'analyse linéaire comporte la résolution d'un système d'équations d'équilibre, simultanées (systèmes discrets ou discrétisés) ou d'équations différentielles (systèmes continus).
- (iv) Identifier les déplacements supposés et calculés mentionnés en (i) et (iii) de manière à obtenir les limites supérieure et inférieure d'une estimation de la valeur critique du paramètre de chargement λ_{cr} . Pour des systèmes discrets la limite supérieure (inférieure) de λ_{cr} est la plus grande (plus petite) valeur de λ nécessaire pour égaler deux vecteurs correspondants non nuls, définissant les déplacements supposés et calculés. Il est nécessaire de faire une estimation correcte de λ pour égaler les valeurs des fonctions qui définissent les déplacements supposés et calculés en un point de valeur non nulle. Ces limites sont, souvent, plutôt difficiles à calculer et seule une estimation de λ_{cr} est possible qui consiste en la valeur de λ requise pour égaliser les fonctions au point spécifié.
- (v) Répéter le processus en utilisant comme estimation initiale la forme de la déformée calculée lors de l'itération précédente. S'arrêter lorsque l'on a obtenu la précision désirée. Pour des raisons numériques, il est souvent pratique de normer le déplacement calculé avant de l'utiliser comme estimation initiale de l'itération suivante. La précision de la solution se mesure soit par la différence entre les limites supérieure et inférieure, soit par l'écart entre des estimations successives de λ_{cr} .

On peut montrer que le processus converge vers le mode d'instabilité critique, ce qui permet donc de calculer le paramètre de charge critique de flambement λ_{cr} .

3. EXAMEN DE LA METHODE DE NEWMARK

Mathématiquement, l'essence de la méthode de Newmark réside dans une technique d'intégration numérique permettant la résolution d'équations différentielles du type $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Elle conduit à un calcul rapide et systématique des cisaillements et des moments dans des poutres isostatiques quelconques soumises à des charges transversales. Si l'on combine la démarche d'intégration de Newmark et la méthode des poutres conjuguées, on peut aussi calculer les pentes et les déplacements dus à la flexion.

Les poutres hyperstatiques peuvent être étudiées par la méthode des forces, la méthode de Newmark fournissant une méthode directe de détermination de la matrice de souplesse.

3.1 Conventions de signe

On choisit des conventions de signe de telle sorte que l'on puisse ajouter les quantités en se déplaçant de gauche à droite le long de la poutre et les retrancher dans le cas contraire. L'effort normal (N) est alors positif en compression, l'effort tranchant (V) est positif s'il tend à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, le moment fléchissant (M) et la courbure (χ) sont positifs quand les fibres supérieures sont comprimées, la pente (θ) est positive de bas en haut vers la droite, la flèche (y) et les charges appliquées (q, Q) sont positives de bas en haut, les forces axiales appliquées (P, p) sont positives de la gauche vers la droite.

3.2 Concepts

Pour pouvoir appliquer la méthode de Newmark, il faut diviser la poutre en plusieurs segments égaux. Chaque point de séparation s'appelle port. Le nombre de ports doit permettre une bonne description de la poutre, des chargements et des conditions d'appui. Quand le chargement consiste en des charges concentrées appliquées aux ports, la méthode détermine les cisaillements dans les segments et les moments de manière exacte aux ports. Les cisaillements sont déterminés en faisant la somme algébrique

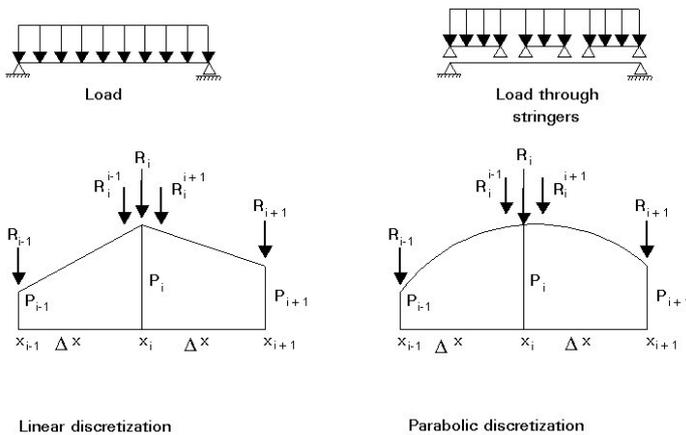


Figure 1 Numerical models for pin-ended beams

des charges le long de la poutre et on trouve les moments fléchissants en ajoutant ou retranchant les produits des cisaillements successifs par la longueur des segments sur lesquels ils agissent. Quand on ne connaît la valeur du cisaillement ou du moment en aucun point de la poutre, on peut faire les calculs sur la base d'une valeur choisie arbitraire (d'habitude, zéro), avec une correction linéaire ou constante (constante) que l'on ajoute plus tard aux moments résultants (aux cisaillements).

Quand la poutre est soumise à des charges réparties, celles-ci peuvent être remplacées par des charges concentrées équivalentes exercées aux ports. Physiquement, ces charges

représentent les réactions dues à une série de pannes hypothétiques de poids propre nul, coïncidant avec les segments et interposées entre les charges et la poutre (voir figure 1). Les réactions des pannes sont équivalentes aux charges réparties dans le sens qu'elles produisent les mêmes cisaillements et moments de flexion aux ports. Les formules de détermination des charges concentrées équivalentes sont exactes, respectivement pour des distributions de charges linéaires et paraboliques et approchées pour des distributions d'ordre supérieur. On peut aussi utiliser les formules relatives aux ports d'extrémité chaque fois qu'il y a un saut dans la valeur ou la pente de la charge appliquée.

Pour une discrétisation linéaire (figure 1a), on a les formules suivantes :

Port d'extrémité :

$$R_{i \pm 1} = \frac{\Delta x}{6} (2p_{i \pm 1} + p_i)$$

Ports intermédiaires :

$$R_i^{i \pm 1} = \frac{\Delta x}{6} (2p_i + p_{i \pm 1})$$

$$R_i = R_i^{i+1} + R_i^{i-1} = \frac{\Delta x}{6} (p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})$$

Pour une discrétisation parabolique (figure 1b), on a :

$$R_{i \pm 1} = \frac{\Delta x}{24} (7p_{i \pm 1} + 6p_i - p_{i \mp 1})$$

$$R^{i+1}_i = \frac{\Delta x}{24} (3p_{i \pm 1} + 10p_i - p_{i \mp 1})$$

$$R_i = R^{i+1}_i + R^{i-1}_i = \frac{\Delta x}{12} (p_{i-1} + 10p_i + p_{i+1})$$

Lorsque le chargement contient des charges réparties, la méthode donne directement les cisaillements moyens dans les segments et les moments fléchissants aux ports. Une simple addition permet d'avoir les cisaillements aux ports. Toutes ces valeurs sont exactes sous réserve que l'on n'introduise pas d'erreur en discrétisant les charges.

Une fois que les moments fléchissants sont connus, on peut traiter les courbures en divisant par la rigidité de flexion EI. Comme les charges (p), le cisaillement (V) et le moment fléchissant (M) suivent les mêmes relations les uns avec les autres que la courbure $\left[\chi = \frac{M}{EI} \right]$, la pente (θ) et la flèche (y), on peut en

conclure que la procédure utilisée pour calculer les moments fléchissants à partir des charges peut aussi être utilisée pour calculer les flèches à partir des courbures, aussi longtemps que l'on prend en compte les différentes conditions aux limites. Pour pouvoir répéter la procédure ci-dessus, la première étape consiste à remplacer les courbures (quantité répartie de manière continue) par des « courbures concentrées » équivalentes. Physiquement, ces quantités représentent le changement brutal de pente qui a lieu aux nœuds d'une poutre hypothétique formée de segments rigides articulés les uns aux autres et dont la raideur de flexion est fournie exclusivement par des ressorts spirales placés aux articulations. Les variations de pente sont équivalentes à des courbures réparties dans le sens qu'elles produisent les mêmes pentes et flèches aux ports. Les formules à utiliser pour calculer les courbures concentrées équivalentes sont celles utilisées pour les charges et représentées sur la figure 1b. Ensuite la procédure donne successivement les pentes moyennes des segments et les flèches aux ports. Il faut noter que ces quantités sont précisément les charges concentrées équivalentes, les cisaillements moyens et les moments fléchissants de la « poutre conjuguée » sollicitée par des charges réparties coïncidant avec le diagramme de courbure de la poutre initiale (le concept de « courbure concentrée » est remplacé par la définition de la « poutre conjuguée »). Enfin, dans le cas de poutres hyperstatiques, la méthode de Newmark convient bien à l'utilisation de la méthode des forces, dans la mesure où elle fournit une manière directe de déterminer la matrice de souplesse et la flèche dans le système de base.

4. METHODE DE VIANELLO-NEWMARK

Chaque fois que l'on applique la méthode de Vianello à des poteaux chargés axialement et que l'on suit l'étape (iii) de la méthode de Newmark, on a la méthode de Vianello-Newmark. Pour l'étape (ii), c'est-à-dire le calcul des valeurs des moments fléchissants aux ports en termes de paramètre de charge et sur la base de l'estimation initiale du mode de flambement, on peut appliquer la procédure suivante, exacte à condition que toutes les charges axiales soient concentrées aux ports :

- (i) Calculer les efforts normaux (N) dans les segments en termes de charges axiales (P) que l'on peut exprimer au moyen du paramètre unique de chargement λ . Si le poteau est hyperstatique dans son sens longitudinal, il faut déterminer les valeurs de N au moyen d'une méthode adéquate (par exemple la méthode des forces).
- (ii) Calculer la valeur de la flèche moins l'incrément de flèche que l'on a dans chaque segment, sur la base de l'estimation initiale ($\Delta y_{ij} = y_i - y_j$). On adopte cette convention de signe de telle sorte que l'on puisse ajouter les quantités quand on se déplace de la gauche vers la droite le long de la poutre et les soustraire dans le cas contraire.

- (iii) Calculer l'incrément du moment fléchissant dû à l'effort normal dans chaque segment ($\Delta M_{ij} = N_{ij} \Delta y_{ij}$).
- (iv) Calculer les moments fléchissants, dus aux forces axiales, aux ports (M'), en ajoutant ou retranchant les valeurs de ΔM . Ces moments fléchissants n'incluent pas l'influence des réactions d'appui et doivent donc être corrigés chaque fois que cette influence existe.
- (v) Faire les corrections appropriées sur les moments fléchissants calculés en (iv). Ces corrections sont identiques à celles vues dans le chapitre précédent et conduisent aux valeurs exactes dans le cas de poteaux isostatiques (dans la direction transversale). Si le poteau est hyperstatique et en supposant que l'on utilise la méthode des forces, on applique la procédure précédemment décrite sur le système de base choisi. On impose la compatibilité pendant l'étape (iii) de la méthode de Vianello qui utilise aussi la technique de Newmark, ce qui permet de déterminer les moments fléchissants et les flèches aux ports du poteau initial.

S'il y a des charges axiales réparties, elles doivent être remplacées par des charges axiales concentrées équivalentes (p_{disc}), en utilisant les formules données figure 1b. La procédure de calcul des moments fléchissants aux ports, mentionnée ci-dessus, devient alors approchée (on peut réduire cette erreur en augmentant le nombre de segments).

Il faut noter que le calcul des courbures concentrées équivalentes est dans ce cas toujours approché. La méthode de Vianello-Newmark conduira alors toujours à une valeur de la charge critique de flambement légèrement différente de la valeur réelle. Cette erreur diminue si le nombre de segments augmente.

5. CONFIGURATIONS D'EQUILIBRE

On peut aussi utiliser les méthodes de Vianello et Vianello-Newmark pour déterminer les configurations d'équilibre de poteaux à géométrie non parfaite ou chargés transversalement sous l'action de charges axiales connues. On n'étudiera ici que la méthode de Vianello-Newmark. La méthode de Vianello ne peut être appliquée que dans quelques cas simples.

Par exemple, le comportement d'une poutre-poteau est donné par la solution de l'équation différentielle suivante (N constant par morceau) :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = N \frac{d^2 y}{dx^2} + q \quad (1)$$

L'application de la méthode de Vianello-Newmark consiste en une procédure itérative qui nécessite de pouvoir estimer au départ la configuration déformée de la poutre-poteau. Le processus converge vers la forme exacte $y(x)$. Chaque itération comporte la résolution des deux équations suivantes :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y_I}{dx^2} \right) = q \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

L'équation (2) constitue l'analyse linéaire standard et n'a besoin d'être résolue qu'une fois, dans la mesure où $y_I(x)$ est la même quelles que soient les itérations. L'équation (3) ressemble fortement au problème aux valeurs propres - fonctions propres que l'on a étudié auparavant, la différence résidant dans le fait que les forces axiales sont maintenant dues à des forces appliquées connues. L'amplitude des estimations initiales de la configuration déformée doit cependant être contrôlée par un facteur Δ , déterminé à l'issue de chaque itération par la condition :

$$\Delta \sum_{i=1}^n y(x_i) = \Delta \sum_{i=1}^n y_{II}(x_i) + \sum_{i=1}^n y_I(x_i) \quad (4)$$

où n désigne le nombre de ports. Cette condition impose une similitude entre les configurations déformées initiales et calculées, dans le sens que la somme des valeurs de leurs ports doit être la même. Si l'imperfection initiale consiste en une excentricité e_o de toutes les charges appliquées, $y_I(x)$ est alors solution de : (N constant par morceau)

$$EI \frac{d^2 y_I}{dx^2} = - N e_o(x) + Ax + B$$

Enfin, il faut mentionner que la méthode diverge si le paramètre de chargement axial λ est supérieur à la valeur critique correspondante λ_{cr} .

6. CONCLUSION

- Cette leçon concerne l'utilisation de méthodes itératives pour résoudre les problèmes de stabilité, en particulier pour la détermination des charges critiques et des configurations d'équilibre.
- L'idée à la base de ces méthodes a été introduite par Vianello et consiste à remplacer la solution d'un problème non linéaire par la solution d'une suite convergente de problèmes linéaires.
- La méthode de Vianello est utilisée pour calculer les charges critiques de flambement de systèmes discrets et continus. Cependant, dans le cas de systèmes continus, elle n'est applicable qu'à des cas plutôt simples.
- Si l'on combine la méthode de Vianello et la technique d'intégration de Newmark, il est possible d'élaborer une méthode efficace de calcul des charges critiques et de détermination des configurations d'équilibre de poteaux chargés axialement.
- La méthode de Vianello-Newmark est particulièrement utile lorsque l'on a des caractéristiques non standard telles que des charges axiales réparties, une rigidité de flexion variable ou des conditions aux limites complexes.

7. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Newmark, N.M. - "Numerical Procedures for Computing Deflections, Moments et Buckling Loads", Transactions ASCE, Vol. 108, 1943.
2. Timoshenko, S.P. et Gere, J.M. - "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, New York, 1961.
3. Bleich, F. - "*Buckling Strength of Metal Structures*", McGraw-Hill, 1952.
4. Allen, A.G. et Bulson, P.E. - "*Background to Buckling*", McGraw-Hill (UK), 1980.
5. Lind, N.C. - "*Numerical Analysis of Structural Elements*", Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, Canada, 1982
6. Chen, W.F. et Lui, E.M. - "*Structural Stability-Theory and Implementation*", Elsevier Science Publishing Co, New York, 1987.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.6.1

**Flambement des éléments réels de structure
1^{ère} partie**

OBJECTIF

Expliquer les effets de la plasticité du matériau et des imperfections géométriques et de structure sur la résistance au flambement des poteaux.

RESUME

On étudie ici le flambement inélastique d'un élément comprimé idéal, c'est-à-dire parfaitement rectiligne sans contraintes résiduelles, avec des lois de comportement du matériau rigide plastique parfaite, élasto-plastique parfaite et réelle. On examine aussi l'influence des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles, à la fois séparément et combinées.

1. INTRODUCTION

Les éléments de structure réels ne se comportent pas exactement comme le prédit la théorie de la bifurcation élastique. Tout d'abord, le matériau n'est pas infiniment élastique ; le résultat est que l'on a un comportement élasto-plastique et un flambement inélastique. Puis, les éléments de structure sont affectés de plusieurs types d'imperfections (principalement de nature géométrique et/ou mécanique) qui peuvent affaiblir sérieusement leur capacité de charge. La modification rapide de la déformation lorsque la charge appliquée augmente (caractéristique du phénomène de flambement), donne aussi lieu à des effets du second ordre qui, lorsqu'ils sont combinés avec un comportement du matériau inélastique, ont pour résultat un comportement non-linéaire global de la structure.

Afin d'illustrer les principales caractéristiques des réponses réelles, cette leçon étudie le cas le plus simple de comportement de flambement, celui d'une barre biarticulée, chargée à ses extrémités et de section droite doublement symétrique (flambement de poteau en flexion).

La leçon 6.3 a défini les paramètres qui gouvernent le comportement élastique d'un barreau géométriquement parfait, c'est-à-dire sans défaut de linéarité initiale, ni excentricité de chargement. La présente leçon examine les effets d'un comportement inélastique du matériau, en l'absence de tout type d'imperfection. Ensuite, on étudiera tour à tour l'influence d'une imperfection géométrique et de contraintes résiduelles. Enfin, on analysera l'effet de toutes ces caractéristiques prises ensemble.

2. EFFET DE LA PLASTICITE DU MATERIAU

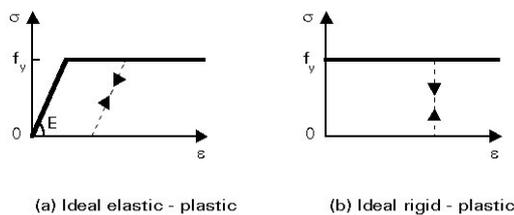


Figure 1 Idealised material behaviour

On représente d'habitude le comportement des nuances d'aciers au carbone ou faiblement alliés par la relation contrainte-déformation élasto-plastique parfaite de la figure 1a. Pour les cas pour lesquels il y a une faible déformation élastique, le modèle rigide-plastique parfait, représenté sur la figure 1b décrit de façon suffisante le comportement du matériau (le plateau représente la limite d'élasticité f_y).

2.1 Modèle de comportement rigide-plastique parfait

Le comportement rigide-plastique suppose que l'on n'ait ni déformation latérale ni axiale pour des valeurs faibles de l'effort normal, N . Chaque section droite fait l'objet de la même contrainte de compression uniformément répartie $\sigma = N/A$ et la déformation axiale n'est possible que lorsque σ atteint la limite d'élasticité f_y ; l'effort normal correspondant est appelé « charge d'écrasement » et vaut :

$$N_{pl} = A f_y \tag{1}$$

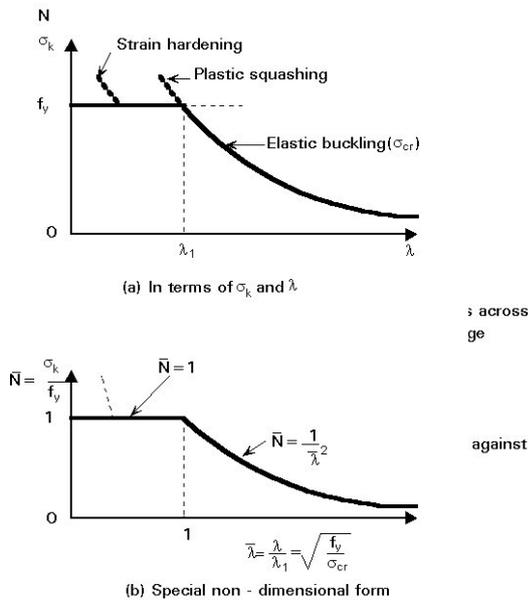


Figure 3 Strength curves for initially straight, pin-ended struts of ideal elastic-plastic material

A ce stade, une petite perturbation quelconque a pour effet de donner lieu à un déplacement latéral qui crée un moment fléchissant supplémentaire. L'élément s'effondre en raison d'une déformation confinée à une rotule plastique en un point quelconque de sa longueur (figure 2a) ; la distribution de contrainte est birectangulaire (figure 2b), la déformation plastique se produisant aussi bien en traction qu'en compression. Après flambement, l'élément reste en équilibre à condition que N devienne plus faible que la charge d'écrasement ; dans ce cas, on n'atteint plus, quel que soit le point de la section droite, la limite élastique en compression. Plus le déplacement latéral est grand, plus le moment fléchissant au droit de la rotule plastique est grand et donc plus petite sera l'effort normal correspondant (figure 2c).

2.2 Modèle de comportement élasto-plastique parfait

Aussi longtemps que la charge critique de flambement élastique N_{CR} est plus faible que la charge d'écrasement N_{pI} , l'élément reste rectiligne et subit une déformation axiale élastique. Lorsque l'effondrement a lieu par flexion élastique critique à la charge $N = N_{CR}$, le déplacement latéral qui en résulte induit des moments de flexion qui augmentent la contrainte sur la partie concave de l'élément et la diminuent sur la partie convexe. L'écoulement se produit, dans la partie centrale de l'élément, en compression et plus rarement en traction.

Quand, par ailleurs, on atteint la charge plastique N_{pI} avant la charge critique de flambement N_{CR} , le comportement est similaire à celui d'un barreau rigide-plastique, mais avec des déformations axiales élastiques et de flexion supplémentaires. La charge de ruine est dans ce cas la charge plastique N_{pI} .

2.3 Courbe de résistance d'un barreau parfait

L'analyse du flambement d'un poteau élastique fait ressortir l'influence de l'élancement, $\lambda = \ell / i$, sur la résistance ; λ désigne la longueur de flambement du barreau, égale à la longueur de l'élément lorsque le barreau est biarticulé et $i = \sqrt{I/A}$ désigne le rayon de giration pour le plan de flambement de flexion considéré. Si l'on représente sur une courbe la contrainte de compression moyenne, σ_k , à la ruine, par rapport à l'élancement, λ , on peut comprendre clairement la relation entre les deux types de comportement (voir figure 3a). Le flambement critique élastique est représenté par l'hyperbole $\sigma = \sigma_{CR} = \pi^2 E / \lambda^2$; sa gamme d'application est limitée par la ligne d'écrasement plastique $\sigma = f_y$. Les deux lignes se coupent à la valeur λ_1 de l'élancement, appelée élancement de référence, tel que $\pi^2 E / \lambda_1^2 = f_y$, ce qui donne

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (2)$$

L'effondrement se produit alors par écrasement plastique pour $\lambda < \lambda_1$ et par flambement élastique quand $\lambda > \lambda_1$. D'habitude on dessine la courbe sous une forme normalisée (figure 3b), où $\bar{N} = \sigma_k / f_y$ est

représenté par rapport à $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_1$, de telle sorte que l'écrasement plastique ($\bar{N} = 1$) et le flambement élastique $\bar{N} = 1/\bar{\lambda}^2$ se coupent pour $\bar{\lambda} = 1$.

2.4 Effets du comportement élasto-plastique réel sur le matériau

Le diagramme contrainte déformation réel de quelques nuances d'aciers utilisées en structure est représenté figure 4. Si l'on compare avec le comportement élasto-plastique parfait, on voit apparaître trois différences principales :

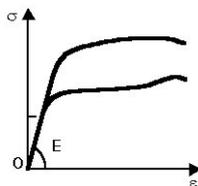


Figure 4 σ - ε relationship for high - strength steels

L'écroutissage n'affecte pas le premier écoulement plastique mais contribue à une augmentation de la charge d'effondrement. Cet effet apparaît plus nettement pour des valeurs faibles de l'élançement, pour lesquelles la déformation plastique prédomine et il devrait relever la portion correspondante de la courbe de résistance du poteau (figure 3a). En pratique, on néglige les effets bénéfiques dus à l'écroutissage.

D'autres types d'acier montrent des comportements contrainte-déformation différents ; en particulier les aciers à haute résistance n'ont pas d'habitude un point d'écoulement plastique clairement défini et peuvent être classés de la manière suivante :

1. Ceux qui ont des courbes contrainte-déformation avec une zone élastique réduite à la limite de proportionnalité σ_p , avec le plateau d'écoulement plastique pour $\sigma = f_y > \sigma_p$ (figure 5a).
2. Ceux qui ont une zone élastique similaire, mais pas de plateau d'écoulement plastique, l'écroutissage existant dans tout le domaine inélastique. Dans ce cas la limite d'élasticité, f_y , est généralement remplacée par la contrainte conventionnelle à 0,2 % (figure 5b). Cette absence de point d'écoulement plastique clairement défini a pour résultats :

- un barreau élancé ($\lambda \geq \lambda_p$, avec $\lambda_p = \pi \sqrt{E / \sigma_p}$) s'effondrera par flambement élastique aussi longtemps que σ_{cr} ne dépasse pas σ_p ,
- un élément très massif s'effondrera par écrasement plastique axial sans déplacement latéral,
- pour la gamme des rapports d'élançements intermédiaires ($\lambda \leq \lambda_p$), la rigidité du matériau en contrainte résistante $\sigma > \sigma_p$ diminue progressivement tandis que la contrainte augmente au-delà de σ_p ; le flambement inélastique peut se produire pour une valeur de charge inférieure à la fois à la charge d'écrasement et la force critique

- a) Pour des déformations importantes, le matériau peut subir un écroutissage.
 - b) La déformation est limitée à une valeur maximale, au-delà de laquelle le matériau se rompt.
 - c) Le point d'écoulement plastique peut ne pas être clairement défini.
- Comme le flambement ne nécessite pas une ductilité importante du matériau, le point (b) est généralement considéré comme non pertinent.

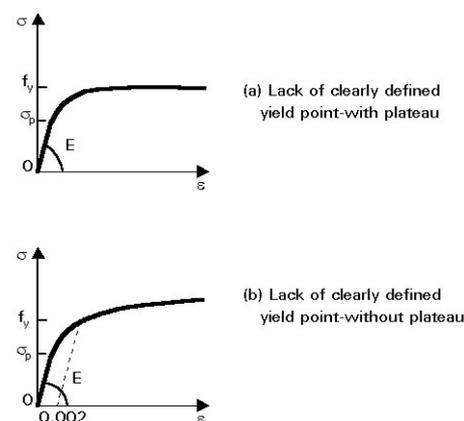


Figure 5 Non-ideal elastic - plastic behaviour (high-strength steels)

élastique.

La courbe de résistance du barreau devient celle qui est représentée sur la figure 6 (l'écroutissement a été négligé).

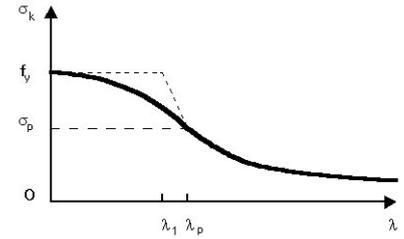


Figure 6 Strength curve for initially straight pin-ended struts of non-ideal elastic-plastic behaviour (strain hardening disregarded)

3. RESISTANCE DE BARREAUX REELS

Les paragraphes précédents considéraient des modèles de barreaux hautement idéalisés qui ne représentent pas la réponse réelle qu'auraient des éléments en compression, en raison des imperfections inévitables dues au procédé de fabrication. Les paragraphes suivants prennent en compte l'effet de ces imperfections sur la réponse des structures réelles ; on va considérer tout d'abord les imperfections prises séparément, puis combinées comme cela peut être le cas dans des structures réelles.

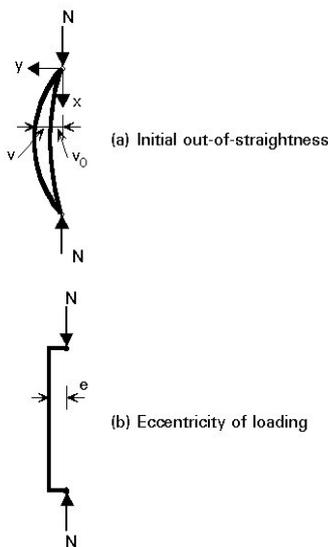


Figure 7 Pin-ended strut having an initial geometric imperfection

3.1 Effet des imperfections géométriques

Les imperfections géométriques correspondent soit à un non linéarité de l'élément de structure (figure 7a), soit à une excentricité de la charge appliquée (figure 7b).

Le flambement se caractérise par un champ de déplacement prédominant associé à la configuration après flambement de l'élément ; tout déplacement initial influera donc sur l'instabilité, de même que toute excentricité de la charge appliquée. Les effets secondaires de déstabilisation qui en résultent réduisent la capacité de charge, par rapport à celle d'un élément parfait.

En raison du fait que ces imperfections sont dans la gamme des tolérances normales de fabrication, elles ne sont généralement pas visibles et ne peuvent pas être quantifiées de manière précise à

l'avance ; elles peuvent cependant être prises en compte, de manière appropriée, dans le calcul. Considérons maintenant les deux types d'imperfections géométriques représentées sur la figure 7 :

- non linéarité initiale du barreau dans le plan de flambement.
- excentricité accidentelle de la charge supposée axiale.

3.1.1 Non linéarité initiale

La non linéarité initiale d'un barreau biarticulé (figure 7a) est aussi appelé « irrégularité initiale » ou « courbure initiale ». Elle crée un moment de flexion secondaire dès l'application de l'effort de compression qui à son tour conduit à une déformation de flexion plus importante et une augmentation de l'amplitude du bras de levier des forces de compression appliquées au bord extérieur. Une configuration déformée stable est possible aussi longtemps que le moment extérieur, c'est-à-dire le produit de la charge par le déplacement latéral, ne dépasse pas la résistance du moment intérieur de la section. Le flambement du poteau en présence d'une courbure initiale se fait donc par divergence d'équilibre, en opposition au type d'instabilité par bifurcation typique des éléments en compression.

Toutes les sections droites du poteau subissent flexion et effort normal combinés, quelle que soit la valeur de la charge. Dans la mesure où la linéarité géométrique n'est plus vérifiée (l'équilibre exige la prise en

compte de la configuration déformée), les effets de la flexion et de l'effort normal ne peuvent pas être simplement superposés pour permettre la description de la réponse réelle.

Pour un chargement et des conditions d'appuis élémentaires, on peut utiliser une procédure directe, basée sur l'intégration de l'équation différentielle appropriée de l'équilibre décrivant la configuration déformée. L'équation fondamentale de l'équilibre pour un barreau avec une courbure initiale élastique $v_0(x)$ dans le plan de flambement est (voir figure 7a) :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{n (v_0 + v)}{E I_z} = 0 \quad (3)$$

où $v(x)$ représente le déplacement de flambement supplémentaire associé à l'effort normal N .

Comme le premier mode de flambement d'un barreau biarticulé est une demi-onde sinusoidale, on peut choisir la courbure initiale de la même forme ; il est alors facile de montrer que l'amplitude du déplacement total v_t à la section critique (pour $x = 0,5 L$ dans ce cas) vaut :

$$v_t = \frac{v_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (4)$$

avec $N_{cr} = \pi^2 E I_z / L^2$, charge critique de flambement du poteau.

L'effort normal, donc, amplifie la non linéarité initiale et le moment de flexion du premier ordre $N v_0$ d'un coefficient amplificateur $1/(1 - N/N_{cr})$:

$$M = N v_t = \frac{N v_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$$

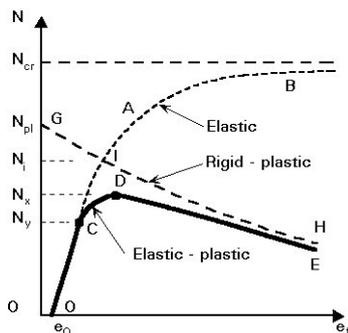


Figure 8 Response of a strut with an initial crookedness (assumption: $N_{pl} < N_k$)

Sur la figure 8 (courbe O'AB) est représenté l'effort normal N en fonction du déplacement latéral total v_t dans le plan de flambement. La flèche tend vers l'infini lorsque N s'approche de la charge critique élastique N_{cr} , tandis qu'il faudrait une traction infinie pour redresser le barreau.

La distribution de moment fléchissant le long de l'élément augmente avec le déplacement latéral. Les valeurs les plus importantes du moment fléchissant et des contraintes sont atteintes aux sections critiques ; sur le bord concave du barreau, les contraintes de compression dues à l'effort normal et au moment fléchissant se superposent et le barreau encaisse la contrainte la

plus forte. Le premier écoulement plastique se produira à cet endroit si l'effort normal augmente régulièrement ; la valeur de N correspondant au premier écoulement plastique, appelée N_y , constitue la limite de validité C de la réponse élastique O'AB (figure 8).

Toute augmentation ultérieure de N au-delà de N_y a pour effet d'étendre l'écoulement plastique, à la fois le long du barreau et à l'intérieur de la section droite (figure 9). D'où une dégradation plus grande de la rigidité du barreau, telle que l'on arrive à une charge maximum N_k , pour laquelle le barreau cède (point D de la figure 8).

La capacité de charge ultime est donc une fonction de deux sources de détérioration de la rigidité de flexion : l'effort normal (instabilité) et l'extension de l'écoulement plastique (plasticité). La distribution de contraintes sur la section droite du barreau aux stades C et D est représentée sur la figure 10. D'habitude, le côté concave du barreau,

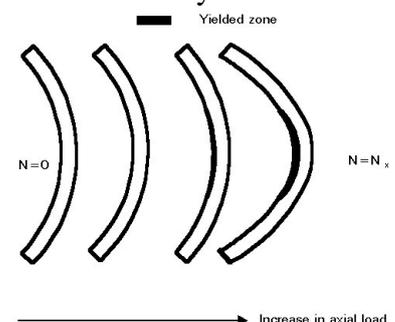
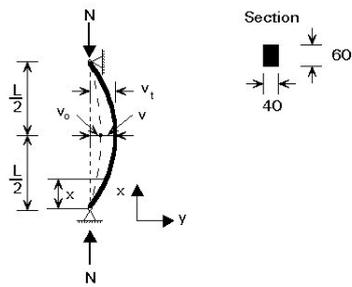
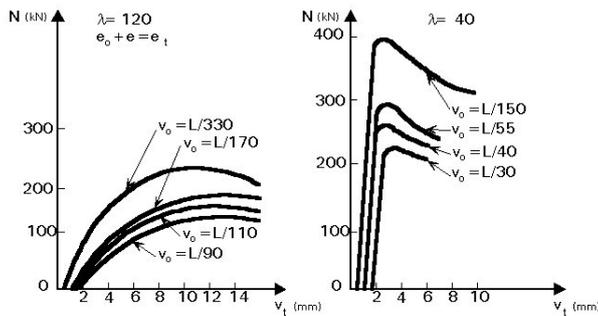


Figure 9 Spread of yielding as collapse approaches



(a) Initial out of straightness for weak axis buckling



(b) Elastic-plastic response for different values of initial out-of-straightness ($E=210000 \text{ N/mm}^2$, $f_y=210 \text{ N/mm}^2$)

Figure 11 Influence of slenderness and out-of-straightness in elastic-plastic response

- c) Le comportement post-effondrement est une courbe qui descend lentement pour des barreaux élancés avec une non linéarité initiale quelconque admissible.
- d) Pour des éléments massifs, la réponse post-effondrement est encore une courbe descendante, avec une pente qui devient plus grande si l'irrégularité initiale diminue.

A condition de pouvoir connaître la courbure initiale à l'avance, (si, par exemple, on peut la mesurer) il est possible de construire une courbe de résistance ultime à partir des charges d'effondrement calculées. Une telle courbe est de la forme (a) représentée figure 12. Si la courbure initiale est semblable au mode de flambement, la courbe de résistance démarre de la valeur $\sigma_k = f_y$ pour des élancements très faibles et se tient en dessous de celle du barreau initialement rectiligne, bien que voisine, tandis que l'élancement augmente. En fait, pour des éléments très massifs, l'influence de la courbure initiale est négligeable et la charge d'écrasement plastique reste la charge ultime. Par ailleurs, des barreaux très élancés montrent une charge critique élastique N_{cr} beaucoup plus faible que la charge d'écrasement N_{pl} ; dans de tels cas, le point C de la figure 8 peut se situer assez haut sur la courbe de réponse élastique, de telle sorte que la charge d'effondrement soit proche de la charge critique élastique. L'influence de l'irrégularité initiale apparaît surtout pour des rapports d'élancements intermédiaires ; la plus grande perte de résistance (résistance) se produit au voisinage de λ_1 , où l'écrasement plastique et le flambement élastique coïncident presque et donc interagissent au maximum.

Si on choisit comme critère d'effondrement la première charge d'écoulement plastique N_y au lieu de la charge maximum N_K , la courbe de résistance sera plus basse, mais de forme semblable (courbe b, figure 12).

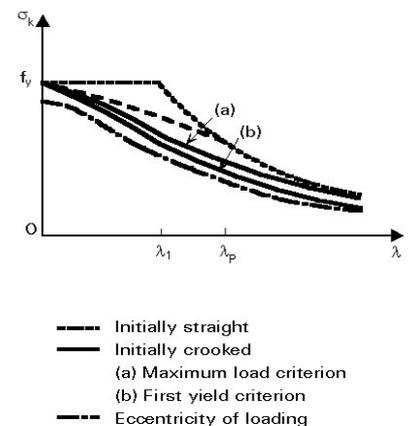


Figure 12 Strength curves

lors de l'effondrement, n'est pas soumis à de la traction. Le comportement post-critique DE est asymptotique à la réponse rigide-plastique GH (voir figure 2c). Celui-ci est représenté sur la figure 8, en supposant que $N_{pl} < N_{cr}$. De manière évidente, la force d'écoulement plastique N_y et la charge ultime N_K ont comme limites supérieures N_{cr} et N_{pl} (on peut en effet avoir $N_{cr} > N_{pl}$ ou $N_{cr} < N_{pl}$). Dans tous les cas, la charge ultime ne dépassera jamais la charge N_i pour laquelle il y a intersection des réponses à la fois élastiques et rigides-plastiques (point I). L'écart que N_y et N_u ont par rapport à N_{cr} et N_{pl} dépend de l'élancement du barreau et de l'amplitude de l'irrégularité initiale.

L'influence à la fois de l'élancement et de la non linéarité sur la réponse élasto-plastique apparaît sur la figure 11, pour une section rectangulaire en acier ; on peut en tirer les conclusions suivantes :

- a) Quelle que soit la rigidité, plus l'irrégularité initiale est grande, plus la charge ultime est faible.
- b) Pour une valeur particulière de la non linéarité relative (v_0/L), plus l'élancement est petit, plus la pente de la zone élastique est grande.

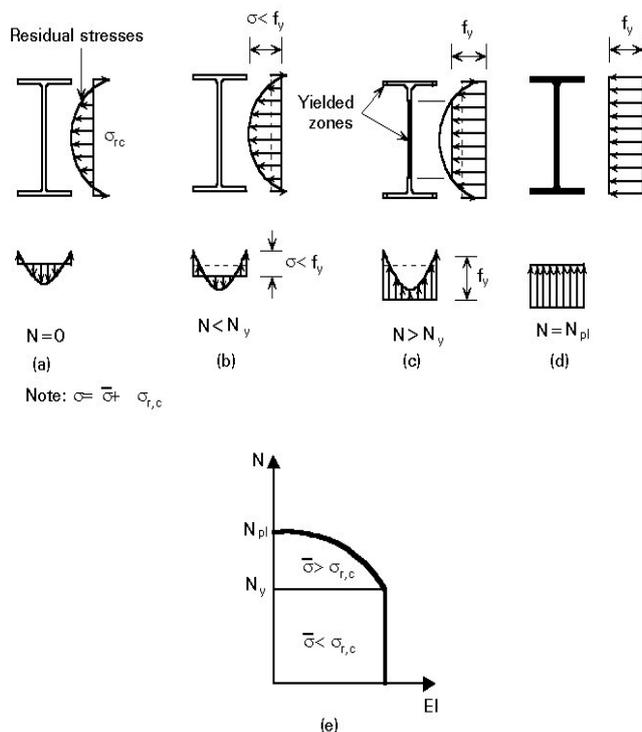


Figure 13 Influence of residual stresses on the buckling strength of the struts (assumption: elastic-plastic behaviour)

3.1.2 Excentricité du chargement

Une charge de compression N , appliquée en extrémité avec une excentricité v_0 à un barreau initialement rectiligne, biarticulé (figure 7b) va introduire un moment de flexion du premier ordre dans le barreau qui va commencer à le déformer latéralement de la même manière que le barreau avec irrégularité initiale que l'on a étudié précédemment.

L'équation différentielle de l'équilibre, dans ce cas, donne :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{N(v_0 + v)}{EI} = 0 \quad (6)$$

La seule différence par rapport à l'équation (3) est que l'imperfection initiale v_0 n'est pas une fonction de x . L'intégration de l'équation (6) montre que le moment fléchissant du premier ordre $M_0 = N v_0$ est amplifié d'un facteur =

$$\left(\pi \sqrt{N / N_{cr}} / 2 \right)$$

Les facteurs amplificateurs associés à l'irrégularité initiale sinusoïdale et à l'excentricité de charge sont proches l'un de l'autre pour la gamme des valeurs de N/N_{cr} que

l'on rencontre en pratique. De ce fait, la réponse en flèche pour un barreau initialement rectiligne en compression excentrée est semblable à celle qui est représentée sur la figure 8, sauf que la courbe de réponse démarre à l'origine des axes.

A la différence de la courbure initiale qui dépend fortement de la longueur du barreau, l'excentricité du chargement est plus liée à la taille de la section. De plus, la flexion du premier ordre est constante sur toute la longueur de l'élément, de telle sorte que la flexion va avoir probablement pour effet de rendre la résistance ultime d'éléments très massifs plus faible que la charge plastique d'écrasement, donnant lieu, de ce fait, à la forme de la courbe de résistance (c) représentée sur la figure 12.

3.2 Effet des contraintes résiduelles

Les formes d'éléments de structure en acier laminé et les plaques contiennent des contraintes résiduelles, dues au refroidissement irrégulier à l'issue du laminage ; il en est de même des éléments reconstitués soudés, pour lesquels c'est une conséquence de l'apport local en chaleur et du refroidissement liés au matériau constituant la soudure et du matériau support autour. De la même manière il existe des contraintes résiduelles dans les sections formées à froid, en raison des grandes déformations plastiques résultant du processus de formage. Pour des éléments non chargés, à l'équilibre, les contraintes résiduelles doivent constituer un état d'auto-contraintes.

La distribution et la grandeur des contraintes résiduelles dépend d'un grand nombre de paramètres ; dans les sections de taille régulière, laminées ou reconstituées soudées, par exemple, on trouve des contraintes résiduelles de traction aux endroits où le refroidissement se fait en dernier ; elles sont contrebalancées par des contraintes de compression dans le reste de la section droite. Sous réserve que l'épaisseur de l'âme de ces sections ne soit pas trop grande, on peut classiquement supposer que la grandeur des contraintes résiduelles est constante sur l'épaisseur de l'âme. Sur la figure 13a est représentée une distribution de contraintes résiduelles typique relative à une section en I.

Les contraintes résiduelles ont un effet sur le tout premier écoulement plastique ; ceci se produit avant que la contrainte moyenne de compression appliquée $\bar{\sigma}$ atteigne la limite d'élasticité du matériau f_y . En fait,

l'attaque de l'écoulement plastique est réalisée dans la(les) fibre(s) qui a(ont) un pic de contrainte résiduelle de compression $\sigma_{r,c}$ à la charge N_Y pour laquelle $\bar{\sigma}_p + \sigma_{r,c} = f_y$.

Jusqu'à ce niveau de charge, le comportement est élastique ; la contrainte uniformément répartie appliquée $\bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_p$ se superpose à la distribution de contrainte résiduelle $\sigma_{r,c}$. Toute charge supplémentaire au-delà de N_Y induit une propagation de l'écoulement plastique dans la section droite. Les fibres plastifiées ont une rigidité réduite par rapport à celles qui sont encore élastiques, car elles ont subi des déformations spécifiques ε , supérieures à la déformation élastique ε_y . Par conséquent, la rigidité de flexion du barreau est constante jusqu'au premier écoulement plastique ; elle décroît ensuite progressivement pour des charges importantes (figure 13e), pour disparaître complètement à la charge plastique d'écrasement (avec l'hypothèse que l'on néglige l'écrouissage). La section entière se plastifie lorsque la contrainte moyenne appliquée est égale à la limite d'élasticité du matériau. La figure 14 représente la contrainte normale moyenne appliquée $\bar{\sigma}_K$ par rapport à la déformation longitudinale moyenne $\bar{\varepsilon}$ (raccourcissement/longueur). Ce graphe ressemble à la courbe $\sigma - \varepsilon$ pour l'acier avec un point d'écoulement plastique pas défini clairement, mais avec plateau d'écoulement plastique (figure 5a). Le comportement est celui d'un poteau en compression constitué de tronçons avec contraintes résiduelles qui serait constitué d'un acier fictif ayant une relation contrainte-déformation et une limite de proportionnalité $\bar{\sigma}_p$ différente de la limite de proportionnalité du matériau en raison de la présence des contraintes résiduelles.

La charge d'écroulement du poteau à tronçons n'est donc pas affectée par les contraintes résiduelles, elle est encore égale à la charge plastique d'écrasement. De la même manière, des barreaux très élancés, dont la contrainte critique de flambement ne dépasse pas $\bar{\sigma}_p$, flambent de manière élastique et ne sont pas affectés par les contraintes résiduelles. Cet effet des contraintes résiduelles est le plus visible dans la gamme des élancements intermédiaires ; dans ce cas, un écoulement plastique prématuré réduit la rigidité de flexion et le barreau flambe de manière inélastique pour une valeur de charge en dessous, à la fois de la charge critique élastique de flambement et de la charge plastique d'écrasement. La courbe de résistance correspondante (résistance) a la forme représentée figure 6 ; on doit cependant garder à l'esprit le fait que les coordonnées représentent respectivement la contrainte moyenne appliquée et la déformation axiale, c'est-à-dire que $\bar{\sigma}_p$ remplace σ_p .

La perte la plus importante de résistance due à l'effet des contraintes résiduelles correspond encore à $\lambda \approx \lambda_1$

3.4 Effets combinés des imperfections

En pratique, on rencontre tous les effets analysés séparément précédents en même temps. Une courbure initiale, une excentricité initiale de la charge, des contraintes résiduelles ou un manque de clarté dans la définition du point d'écoulement plastique diminuent la résistance du poteau dans toute la gamme de l'élancement ou une partie. Par ailleurs, l'écrouissage augmente probablement la courbe de résistance, bien qu'il n'affecte que la gamme des élancements faibles. L'effet bénéfique ainsi obtenu fait en général plus que compenser la perte de résistance due aux excentricités accidentelles ; dans tous les cas la courbe de résistance du poteau est considérée comme tronquée à $\bar{\sigma} = f_y$, de telle sorte que l'on ignore la réserve de résistance.

Des expériences et des calculs numériques montrent clairement que :

- a) Les influences séparées des contraintes résiduelles et d'une irrégularité initiale ne peuvent pas être simplement ajoutées si l'on veut obtenir une bonne estimation de leur influence combinée sur la résistance ultime ;
- b) Pour des rapports d'élancements intermédiaires et pour de faibles contraintes résiduelles, l'influence combinée est normalement inférieure à la somme des parties, alors que dans les

- autres cas, elle peut être supérieure ;
- c) Des variations dans la forme de la répartition des contraintes résiduelles donnent lieu à des différences dans la résistance du poteau ; elles sont, cependant, plus faibles pour des poteaux avec irrégularité initiale que pour des poteaux initialement rectilignes ;
- d) L'influence à la fois de la non linéarité et des contraintes résiduelles est plus grande pour les poteaux qui ont des rapports d'élanement intermédiaires. Dans cette gamme, les charges d'écrasement et les charges critiques coïncident presque ; la résistance ultime dépend de la rigidité de flexion, de la limite d'élasticité du matériau, de l'amplitude et de la distribution des contraintes résiduelles et de l'irrégularité initiale. L'interaction entre ces dernières imperfections peut donner lieu à une chute importante de la résistance ultime, comparée à la résistance axiale ultime du poteau parfait.

Dans la mesure où tous les écarts par rapport aux barreaux et matériau idéaux peuvent être soumis à des variations statistiques, il est impossible de prédire de manière précise la résistance réelle d'une forme donnée de type barreau standard. Pour des raisons de calcul, on utilise les courbes de limite inférieure de résistance, de manière à s'assurer, pour une probabilité donnée, que les charges de flambement calculées ne surestiment pas la résistance ultime réelle.

4. CONCLUSION

- Un barreau initialement droit chargé en compression, constitué d'un matériau élasto-plastique parfait, en l'absence de contraintes résiduelles, peut s'effondrer soit par écrasement plastique pour $\lambda < \lambda_1$, soit par flambement élastique de poteau pour $\lambda > \lambda_1$.
- Cette résistance « idéale » (résistance) est en pratique inférieure, en raison d'imperfections géométriques et de structure telles que irrégularité initiale, excentricité du chargement, contraintes résiduelles et manque de définition précise du point d'écoulement plastique.
- L'écroutissage du matériau a pour effet d'augmenter la résistance pour la gamme des très petits élanements ; il est cependant, la plupart du temps, négligé, de telle sorte que la charge ultime de poteaux très massifs est donnée par la charge plastique d'écrasement.
- Les imperfections ont pour effet de diminuer la résistance pour des valeurs intermédiaires de l'élanement ; la perte de résistance la plus importante est obtenue pour le domaine des valeurs d'élanements $\lambda \approx \lambda_1$, pour lesquelles les charges plastiques d'écrasement et les charges critiques de flambement élastique coïncident presque et donc interagissent le plus.
- L'effet des imperfections est faible dans la gamme des valeurs d'élanements très grands et la charge ultime est proche de la charge critique de flambement élastique.
- Le rapport d'élanement est le paramètre géométrique sur lequel on devrait baser la détermination de la nature du comportement et du mode d'effondrement.

5. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Ballio G. et Mazzolani F., "*Theory and Design of Steel Structures*", Chapman and Hall, London, 1983.
2. Dowling P.J., Knowles P. et Owens, G.W., "*Structural Steel Design*", Butterworths, London, 1988.
3. Galambos T.V. (editor), "*SSRC Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*", 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, 1988.
4. McGuire W., "*Steel Structures*", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N-J., 1968.
5. Picard A. et Beaulieu D., "*Calcul des charpentes en acier*", Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.

ESDEP

GROUPE DE TRAVAIL 6

STABILITE APPLIQUEE

Leçon 6.6.2

Flambement des éléments réels de structure 2^{ème} partie

OBJECTIF

Étendre et généraliser aux autres phénomènes d'instabilité les conclusions de la leçon 6.6.1 sur le flambement des poteaux.

RESUME

On considère le voilement et les types de flambement comportant des déformations de torsion, ainsi que le type de base du flambement de coque, c'est-à-dire le cas d'un cylindre en compression axiale. On donne, pour chaque type de flambement, une description des phénomènes de base ; le comportement est analysé en termes de pré-flambement, post-flambement et comportement d'effondrement et on identifie les paramètres géométriques gouvernant le phénomène. On fait aussi quelques brefs commentaires sur la manière dont on peut renforcer les éléments en vue de prévenir les ruines par flambement.

1. INTRODUCTION

L'influence des imperfections, de la plasticité du matériau et de l'érouissage sur la résistance ultime a été analysée en détail dans la leçon 6.6.1 précédente, en faisant référence au flambement de flexion d'un poteau. C'est là la forme d'instabilité d'élément qui a été le plus étudiée et l'on a une compréhension presque complète du phénomène.

La plupart des conclusions tirées de la leçon précédente sont encore valables, en des termes généraux, pour d'autres formes d'instabilité. Ces formes d'instabilité sont, toutefois, caractérisées par différentes sortes de déformations, de telle sorte que la nature des imperfections qui affectent le plus la résistance ultime crée des effets différents de ceux créés par le flambement de flexion ; pour mieux comprendre la résistance des poteaux au flambement réel, il faut analyser l'effet des imperfections sur ces différentes formes d'instabilité.

On examinera en premier le voilement, parce qu'on le rencontre souvent sous la forme de flambement local, c'est-à-dire flambement de composants de section en forme de plaque ; de plus, cela aide à comprendre le flambement des poteaux par torsion, pour lesquels le flambement est créé par une rotation de la section droite. On étudie ensuite le flambement par flexion-torsion des poteaux ; cette dénomination est correcte car les déformations de flexion et de torsion sont toujours liées l'une à l'autre, comme c'est le cas pour le flambement latéral de torsion des poutres. On considèrera aussi le flambement des coques ; ce phénomène très complexe est décrit par référence au cas élémentaire d'une coque cylindrique chargée axialement.

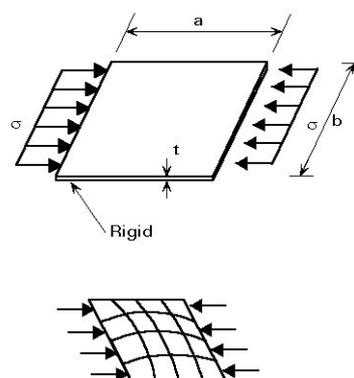


Figure 2 Fundamental case for compressive plate buckling

2. VOILEMENT

Le voilement d'une plaque a lieu lorsque sa section à âme mince subit des contraintes de compression. Ce phénomène ressemble assez au flambement de poteau ; il implique cependant plutôt les éléments de la section droite du composant que le déplacement de la section dans son ensemble. Les contraintes de compression peuvent naître, non seulement d'un effort normal de compression, mais aussi de la flexion du composant et même de charges localisées sur des zones réduites (figures 1a, 1b et 1c). On peut aussi trouver du voilement sur des plaques soumises au cisaillement (figure 1d), dans la mesure où le cisaillement donne lieu à des contraintes principales de compression et de traction.

Les sections formées à froid et les sections constituées de plaques minces sont les plus sensibles au voilement.

Les modes de flambement élastique et les contraintes critiques correspondantes des plaques en compression dérivent des équations des plaques faiblement déformées ; leur étude a été faite dans la leçon 6.3.

On reconnaît depuis longtemps que la charge critique de voilement d'une plaque n'est pas un moyen satisfaisant de mesure de la résistance réelle d'une plaque. En fait, dès que la plaque a tendance à flamber, les déplacements hors du plan donnent lieu à des forces de membrane dues à l'allongement du plan moyen de la plaque.

Pour comprendre ce comportement, considérons une plaque rectangulaire

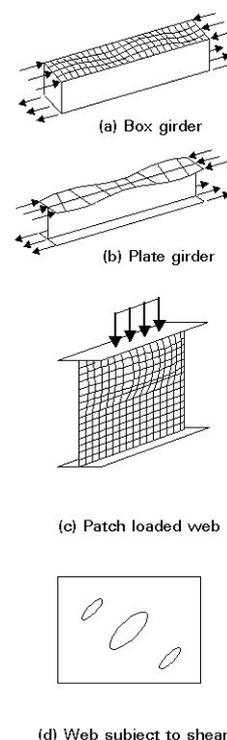


Figure 1 Types of plate buckling

initialement plate, dont les côtés sont soit simplement appuyés, soit encastres et chargée par un effort de compression uniaxiale uniforme. Supposons, de plus, que le rapport des dimensions est tel que la plaque flambera dans un mode à une seule demi-onde (figure 2). Pour cette étude, on peut remplacer la plaque par un système de bandes dans les deux directions perpendiculaires ; les bandes longitudinales sont comprimées et sont donc susceptibles de flamber. En dessous de la charge critique de flambement élastique de la plaque, toutes les bandes longitudinales sont rectilignes car la plaque est plate ; elles conservent leur rigidité initiale et subissent la même contrainte de compression. Une fois que la plaque flambe, les bandes longitudinales proches du bord sont obligées de rester rectilignes, alors que celles qui sont éloignées des bords sont plus sujettes au flambement ; en d'autres termes les premières conservent leur rigidité axiale, tandis que les autres en perdent une partie.

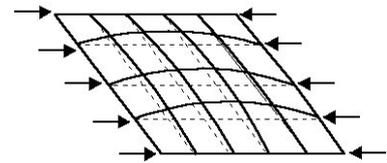
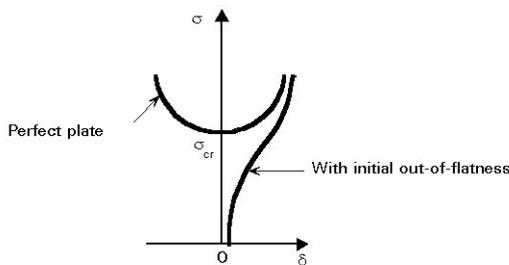
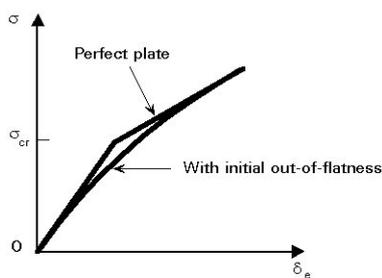


Figure 3 Buckled mode for plate buckling in compression

Le voilement crée une augmentation de longueur des bandes transversales, car les bords longitudinaux sont retenus vis-à-vis du raccourcissement libre de la plaque dans la direction transversale ; ceci crée des forces de traction de membrane dans les bandes transversales qui exercent un effet stabilisateur sur les bandes longitudinales (figure 3). Ceci explique pourquoi la plaque peut atteindre un état d'équilibre stable au-delà de sa charge critique de flambement élastique, avec pour résultat la possibilité d'avoir une résistance postflambement importante, à condition que le matériau ne se plastifie pas prématurément. C'est la différence fondamentale entre le comportement d'une plaque et le flambement d'un poteau qui, lui, ne peut présenter une telle réserve de résistance.



(a) Applied stress plotted against lateral deflection



(b) Applied stress plotted against end shortening

Figure 4 Behaviour of plate buckling in compression

Le voilement se traduit, ainsi qu'on l'a dit précédemment, par une distribution de contraintes de membrane non uniforme à travers la plaque, avec des valeurs maximales (pics) aux bords longitudinaux (figure 5). L'écoulement plastique apparaîtra donc sur ces bords et se propage rapidement jusqu'à l'effondrement.

La résistance postflambement apparaît en particulier

Quand une plaque se voile, il y a interaction des déplacements dans le plan et hors du plan, d'où un comportement non linéaire. Le comportement d'une plaque, dans le domaine des grands déplacements, ne peut être déduit qu'à la fois des équations de compatibilité et des équations non linéaires d'équilibre des plaques. Il est représenté, sur la figure 4, par le tracé de la contrainte principale appliquée par rapport au déplacement latéral de la plaque et par rapport au raccourcissement d'extrémité ; le dernier tracé est bilinéaire lorsque la plaque est initialement parfaitement plate et sa pente représente la rigidité axiale de la plaque ; la rigidité axiale postflambement dépend des maintiens dans le plan offerts par les liaisons, mais varie généralement de 40 à 75 % de la rigidité initiale. Plus les maintiens par rapport aux déplacements dans le plan fournis par les liaisons (d'abord sur les bords longitudinaux) sont importants, plus l'effet stabilisateur dû aux forces de membrane sera grand et plus la réserve disponible de résistance postflambement sera grande.

La charge ultime est finalement atteinte lorsque la rigidité de la plaque a été suffisamment détériorée par la plasticité du matériau.

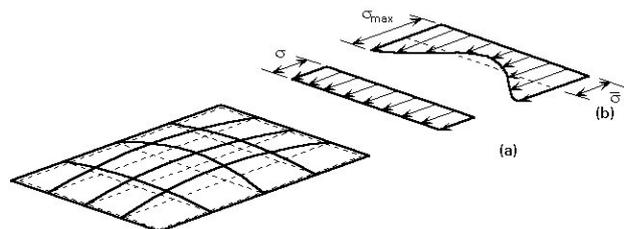


Figure 5 Stress distribution: (a) in the pre-buckling range and (b) in the post-buckling range

sur les plaques qui ont des proportions réduites et qui, jusqu'à une certaine limite, se comportent de manière élastique. Dans ce cas, la charge ultime peut être égale à plusieurs fois la charge critique élastique. Pour des plaques d'élançement faible ou intermédiaire, c'est la plasticité du matériau qui affecte principalement le comportement de la plaque ; en fait plus la plaque est massive, plus l'écoulement plastique aura tendance à précéder le voilement, ce qui donnera lieu à une résistance ultime éventuellement plus faible que la charge critique élastique.

Les processus de mise en œuvre et de fabrication d'une plaque donnent lieu à des imperfections géométriques inévitables et à des contraintes résiduelles. Dans la plupart des cas, les deux ont des effets sur le comportement pré- et postflambement.

Les imperfections géométriques de base sont la non-planéité initiale qui, comme on peut s'y attendre, affecte de manière significative le voilement. En raison du manque de planéité, les déformations de la plaque hors du plan augmentent dès le début du chargement. La grandeur de la non-planéité influe sur la réponse de la plaque par la déformée due à la charge ; cependant, aussi longtemps que cette réponse est élastique, les plaques, quel que soit le niveau de l'imperfection, s'approcheront du comportement postflambement des plaques parfaitement plates (figure 4a).

Sur un tracé charge-raccourcissement d'extrémité, l'effet de la non-planéité est d'arrondir le « coude » à la contrainte critique (figure 4b). Non seulement la grandeur, mais aussi le dessin de la non-planéité ont une influence sur la réponse de la plaque ; plus le mode de flambement est proche de ce dessin, plus le voilement apparaît et se produit doucement. Par ailleurs, toute non-planéité différente du mode de flambement a tendance à retarder le voilement ; cependant, quand il se produit, il se produit soudainement et donne lieu à un claquement sec. En raison de la nature aléatoire de la répartition de la non-planéité (inconnue au stade du calcul), on suppose d'habitude, par prudence, que l'imperfection est proche du premier mode de voilement de la plaque.

Les contraintes résiduelles dans la plaque ont aussi tendance à réduire la rigidité axiale initiale et à affecter le processus d'écoulement plastique.

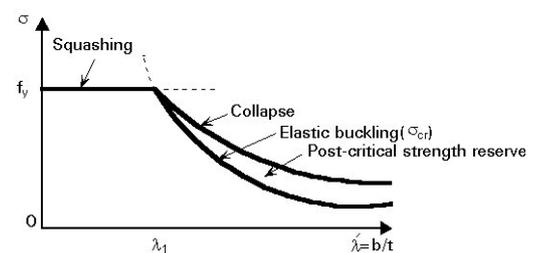
L'élançement de la plaque est le paramètre géométrique qui gouverne la résistance ultime de la plaque. Cette dernière est généralement représentée (figure 6a), par le tracé de la

contrainte principale appliquée à l'effondrement par rapport au paramètre d'élançement $\lambda' = b/t$, « b » désignant l'épaisseur de la plaque dans la direction perpendiculaire à la compression. Une plaque élastique initialement plate flambe pour une contrainte critique :

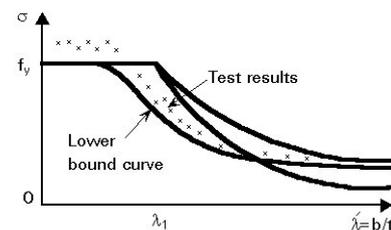
$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \left[\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \right] \left(\frac{1}{\lambda'} \right)^2 \quad (1)$$

où : k_{σ} désigne le coefficient de voilement
 ν est le coefficient de Poisson.

À cause de la plasticité du matériau, la charge d'écrasement fournit une limite à la résistance de la plaque et constitue une limite tronquée de la courbe de flambement élastique. Comme on l'a expliqué précédemment, cependant, la contrainte ultime moyenne d'une plaque élançée, c'est-à-dire une plaque pour laquelle σ_{cr} est plus faible que la limite d'élasticité f_y , dépasse la contrainte critique élastique à cause de la résistance postflambement ; la courbe de la contrainte ultime se trouve au-dessus de la courbe de la contrainte critique. La transition entre l'écrasement et le voilement a lieu pour $\sigma_{cr} = f_y$, c'est-à-dire pour la valeur suivante de l'élançement :



(a) Perfect plate



(b) Actual plate

Figure 6 Influence of plate slenderness on buckling strength

$$\lambda_1' = \pi \sqrt{\frac{k E}{12 (1 - \nu^2) f_y}} \quad (2)$$

Pour une plaque longue simplement appuyée, soumise à une compression uniforme, le coefficient de flambement est en gros de $k = 4$; la valeur correspondante de $\lambda_1' = 1,9 \sqrt{E / f_y}$ vaut entre 56 et 46 pour les nuances d'acier habituelles S235 et S355. La valeur du coefficient de flambement k , pour les autres cas, dépend du rapport des dimensions de la plaque, du type de chargement et des conditions aux limites.

L'existence d'une résistance postflambement pour la plaque soumise au cisaillement peut être expliquée physiquement de la manière suivante : un élément carré, dont les bords sont orientés à 45° par rapport aux côtés de la plaque, subit des contraintes de traction σ_1 sur deux faces opposées et des contraintes de

compression σ_2 , sur les deux autres (figure 7a) ; ces contraintes de compression peuvent donc induire du voilement sous la forme de renflements allongés orientés dans la direction des contraintes de traction (figure 7b). La contrainte critique de cisaillement élastique, τ_{cr} , est donnée par une expression semblable à σ_{cr} ; de plus τ_{cr} dépend du rapport des dimensions et des conditions de

liaison sur les bords. Une fois que la plaque flambe au

cisaillement, l'augmentation des contraintes de compression n'est plus possible, tandis que la rigidité axiale initiale de la plaque, dans la direction de la composante de traction est encore presque complètement disponible. De ce fait, ce sont les augmentations de contraintes de traction qui servent fondamentalement à résister aux augmentations de l'effort de cisaillement et par conséquent les renflements se rapprochent. La plaque se comporte comme une série de bandes dans la direction de la traction et développe une soi-disant zone de traction (figure 7c). Cette zone tourne quand la contrainte appliquée augmente, pour s'aligner plus précisément sur la diagonale de la plaque ; la charge ultime de cisaillement est atteinte quand ces bandes se plastifient. Ici aussi, les liaisons dans le plan peuvent avoir une influence appréciable sur l'augmentation de la réserve de résistance postflambement.

On peut donc en conclure que la non-planéité initiale, les contraintes résiduelles et l'écroutissage affectent tous le comportement et la résistance ultime des plaques ; leur effet est similaire à celui du flambement d'un poteau, l'unique mais fondamentale différence étant que, pour des élancements élevés, la courbe de résistance de la plaque s'approche plutôt de la courbe postflambement que de la courbe de flambement critique.

On peut étendre qualitativement les conclusions ci-dessus à n'importe quelle portion de plaque qui subit des contraintes de compression ; quantitativement, on peut dire que la quantité de résistance postflambement peut varier de façon appréciable avec le type de chargement et le type de conditions aux limites.

De la même manière que pour les courbes de résistance des poteaux, les courbes de résistance des plaques sont d'habitude tracées selon des coordonnées normées (figure 6b) : la contrainte ultime principale est divisée par la contrainte d'élasticité du matériau, tandis que l'on définit un élancement normé de la plaque, comme pour le flambement de poteau, dans les termes généraux :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (3)$$

En utilisant l'équation (1), l'élancement normé de la plaque est :

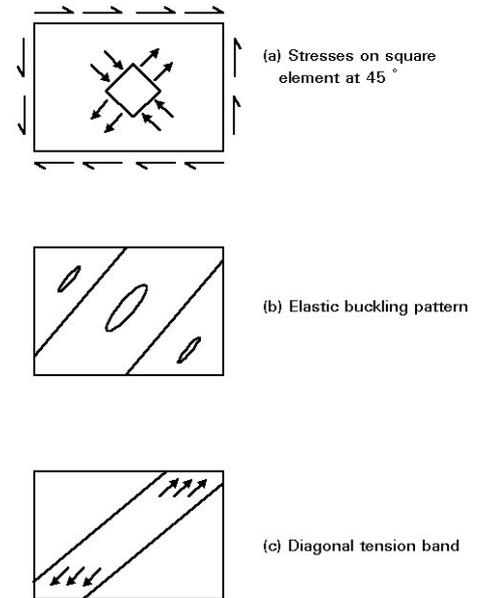


Figure 7 Plate buckling in shear

$$\bar{\lambda}_p = \frac{b}{t} \frac{1,05}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (4)$$

En conséquence, $\bar{\lambda}_p = 1$ constitue l'élancement limite correspondant à la transition entre l'écrasement et le voilement. L'élancement normé inclue l'élancement de plaque classique, $\lambda' = b/t$, mais est modifié, à travers k , par le rapport des dimensions de la plaque, le type de chargement et les conditions aux limites. Si on veut prendre en compte les imperfections réelles, les courbes de résistance de la plaque devraient se situer à la limite inférieure des résultats de tests disponibles.

3. FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR TORSION

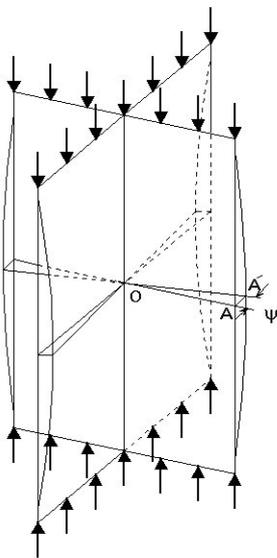


Figure 8 Torsional buckling of cruciform section

L'instabilité due au flambement par torsion ne peut se développer que dans des circonstances spéciales. Ce type de flambement est illustré au moyen d'un barreau en compression composé de quatre pans saillants identiques, constituant une section cruciforme (figure 8) ; chaque pan est constitué d'une plaque mince plate, encline à flamber sous l'effet de l'effort de compression. Si une telle plaque était simplement appuyée le long de l'axe du poteau, elle flamberait de telle sorte que toute ligne OA du pan, perpendiculaire aux bords longitudinaux, resterait approximativement rectiligne, bien que tournant autour du point O. Comme les pans sont identiques, chacun d'eux doit flamber pour la même valeur de la contrainte appliquée. Il est alors possible de trouver une forme de flambement pour laquelle toute section droite du barreau cruciforme ne se tord pas, mais tourne autour de O. Les quatre pans continuent à se rencontrer à angle droit de telle sorte que le fait qu'ils soient liés rigidement le long d'un bord commun n'a pas d'importance. Cette forme de flambement, où l'axe du barreau reste rectiligne, mais les sections tournent est appelé « flambement par torsion ».

Comme de la torsion intervient dans un tel processus de flambement, la contrainte critique de flambement élastique dépend en partie de la rigidité de torsion de Saint-Venant et de la rigidité de gauchissement. De plus, les liaisons terminales vis-à-vis de la torsion et du gauchissement doivent apparaître dans les facteurs numériques utilisés. Le flambement par torsion ne peut se produire correctement que quand le centre de cisaillement et le centre de gravité de la section droite correspondent, c'est-à-dire uniquement pour des sections symétriques ; cette forme de flambement est évidemment favorisée pour les composants à âme mince. Comme le flambement par flexion (appelé couramment flambement de poteau) est encore possible, il faut examiner chaque forme pour déterminer laquelle donne la contrainte critique la plus faible. Comme pour le flambement par flexion, la charge critique de flambement élastique par torsion ne constitue pas un moyen adéquat de mesure de la capacité porteuse. On doit aussi tenir compte des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles et des effets dus à la plasticité du matériau et à l'écroutissage. En ce qui concerne les imperfections géométriques initiales, la rotation initiale du barreau et le manque de planéité des composants de la section sont, comme on peut le comprendre, les plus significatifs. A la différence du flambement par flexion, pour lequel on a beaucoup d'informations, la résistance ultime associée au flambement par torsion ne peut pas être estimée avec une grande précision à cause du manque d'expériences suffisamment documentées et des résultats correspondants des tests. Le fait de tolérer des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles, la plasticité du matériau et l'écroutissage, tous paramètres réduisant la charge ultime à une valeur inférieure à la charge critique élastique est plus basé sur un jugement d'ingénieur que sur une procédure parfaitement justifiée. On

accepte généralement que la procédure utilisée pour le flambement par flexion puisse être étendue au flambement par torsion, sous réserve de faire l'hypothèse que les diminutions de résistance dues aux imperfections et à la plasticité sont semblables dans les deux cas, si on les exprime en coordonnées normées. L'élancement normé est logiquement défini de la manière suivante :

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,T}}} \quad (5)$$

où $\sigma_{cr,T}$ représente la contrainte critique de flambement par torsion élastique.

4. FLAMBEMENT PAR FLEXION-TORSION

Les déplacements de flexion et de torsion se combinent quand le centre de cisaillement et le centre de gravité de la section ne correspondent pas. Ceci a pour conséquence une réduction de la charge critique de flambement par rapport à celle du flambement par flexion. Ce phénomène est particulièrement important pour les cornières et les profilés en U.

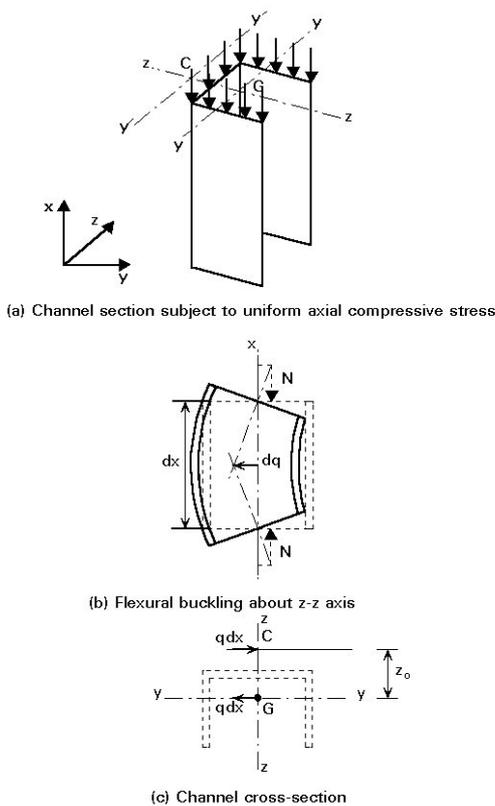


Figure 9 Flexural-torsional buckling

impossible, parce que les déformations de flexion et de torsion sont inévitablement couplées. Cette forme de flambement est appelée « flambement par flexion-torsion ».

Le flambement par flexion-torsion est déterminé par trois équations différentielles d'équilibre qui contiennent les dérivées des trois fonctions : déplacements v et w dans les plans yy et zz et la rotation ψ . La charge de flambement par flexion-torsion dépend alors des classiques conditions aux limites pour v et w aux extrémités (articulées ou encastées) et des maintiens en rotation et vis-à-vis du gauchissement pour ψ .

Dans le cas usuel du barreau biarticulé, parfaitement libre de se gauchir, c'est-à-dire $v = v'' = 0$, $w = w'' = 0$ et $\psi = \psi'' = 0$ aux extrémités, la contrainte critique de flambement par flexion-torsion vaut :

Pour illustrer cette forme de flambement, on considère une section en U soumise à une charge de compression uniaxiale appliquée au centre de gravité, de telle sorte que les sections terminales subissent une contrainte uniformément appliquée (figure 9a). La section est supposée être dimensionnée de telle sorte que le moment d'inertie de flexion, I_{yy} par rapport à l'axe yy soit plus grand que celui relatif à l'axe zz ; le flambement de flexion par rapport à l'axe zz est donc celui qui est déterminant (figure 9b). Dès que le barreau a tendance à flamber dans la direction yy , c'est-à-dire par flexion par rapport à l'axe zz , la flèche $v(x)$ crée un moment de flexion $M(x) = Nv(x)$, donnant naissance à un cisaillement correspondant :

$$V = dM/dx = N(dv(x)/dx).$$

Tout se passe comme si le barreau était soumis à des forces distribuées transversales :

$$q = - dV(x)/dx = - N (d^2v(x)/dx^2)$$

agissant dans le plan yy contenant le centre de gravité G et non pas dans le plan zz qui contient le centre de cisaillement C (figure 9c). De ce fait, la flexion par rapport à l'axe zz et le cisaillement correspondant induisent un moment de torsion $dM_t = qz_0 dx$, où z_0 représente la distance entre le centre de gravité et le centre de cisaillement. Ceci veut dire qu'un flambement purement par flexion dans le plan yy est

$$\sigma_{cr,FT} = \frac{\sigma_{cr,zz} + \sigma_{cr,T} \pm \sqrt{(\sigma_{cr,T} - \sigma_{cr,zz})^2 + 4 \sigma_{cr,zz} \sigma_{cr,T} \left(\frac{z_0}{r_0}\right)^2}}{2 \left[1 - \left(\frac{z_0}{r_0}\right)^2 \right]} \quad (6)$$

où y_0 et z_0 sont les coordonnées du centre de cisaillement, avec $r_0^2 = y_0^2 + z_0^2$.

On voit que cette valeur est toujours plus faible que la contrainte de flambement par flexion, $\sigma_{cr,zz}$ par rapport à l'axe zz et que la contrainte de flambement par torsion, $\sigma_{cr,T}$. On devrait aussi vérifier qu'elle est aussi plus faible que la charge de flambement par flexion $\sigma_{cr,yy}$ par rapport à l'axe yy qui est une autre racine de l'équation caractéristique.

Il faut noter que pour une section doublement symétrique ($z_0 = y_0 = r_0 = 0$), les racines sont :

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cr,yy} = \sigma_{cr,zz}$$

et que la plus faible de ces trois valeurs - $\sigma_{cr,T}$, $\sigma_{cr,zz}$ et $\sigma_{cr,yy}$ - est celle qui est déterminante.

Le flambement par flexion-torsion entraîne des déformations dues à la fois au flambement du poteau par flexion et par torsion. La résistance ultime associée sera alors modifiée par tous les types d'imperfections, dans la mesure où elles modifient ces deux phénomènes de base.

Comme dans le cas du flambement de poteau en torsion, on manque d'information sur la perte de résistance de flambement par flexion-torsion due aux imperfections, aux contraintes résiduelles et à la plasticité du matériau ; ici encore, on peut généraliser la procédure utilisée pour le flambement par flexion en utilisant les mêmes courbes de résistance normée, en supposant que l'élanement normé est défini de la manière suivante :

$$\bar{\lambda}_{FT} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,FT}}} \quad (7)$$

5. DEVERSEMENT DES POUTRES

Quand une poutre est soumise à une flexion selon son axe d'inertie la plus grande, due, soit à des couples d'extrémités, soit, plus classiquement, à des charges transversales, une des deux semelles ainsi que la partie adjacente de l'âme, est comprimée, et, donc, susceptible de flamber.

Le flambement de la semelle comprimée dans le plan de l'âme est normalement empêché par l'âme, en raison de la grande rigidité de cette dernière dans son propre plan ; le flambement de la semelle dans son plan est donc, le plus souvent, critique, parce que l'âme ne fournit qu'un encastrement limité dans cette direction. Quand l'âme est très élancée, elle risque probablement de se déformer, de telle sorte que l'encastrement est négligeable et le déversement est très proche du flambement de la semelle par flexion par rapport à l'axe le plus faible de la section droite (figure 10a). Une âme massive, toutefois, se comporte en gros comme un élément plaque rigide et le déversement amène la section à tourner (figure 10b). À cause de la rotation des axes principaux par rapport à leur direction initiale, la déformation qui en résulte est une combinaison de torsion et de flexion latérale.

Pour une poutre parfaite, chargée dans la direction de la flexion la plus forte,

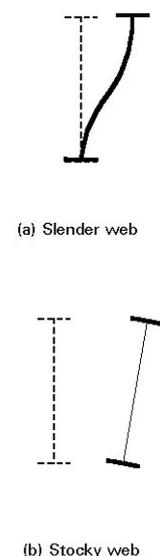


Figure 10 Instability of beams

le déversement se produit pour une valeur critique du moment fléchissant maximum ou de la contrainte de compression maximum. Cette valeur dépend de plusieurs facteurs : la distribution de moment le long de la poutre (forme du diagramme de moment fléchissant), les conditions aux limites (maintiens en flexion, torsion et gauchissement), le niveau d'application des charges transversales et la possible dissymétrie de la section droite. Comme ce flambement mêle torsion et flexion selon l'axe le plus faible, le moment fléchissant critique pourra s'exprimer en termes de longueur de poutre L , de rigidités en torsion et vis-à-vis du gauchissement, respectivement $G I_t$ et $E I_w$ et en termes de rigidité de flexion par rapport à l'axe le plus faible, $E I_{zz}$.

Le moment fléchissant critique élastique d'une section en I ou H, par exemple, est donné par :

$$M_{cr,LT} = C_1 \left[\frac{\pi^2 E I_{zz}}{(kL)^2} \right] \left\{ \sqrt{\left[\frac{k}{k_w} \right]^2 \frac{I_w}{I_{zz}} + \frac{(kL)^2 G I_t}{\pi^2 E I_{zz}} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right\}$$

où C_1 et C_2 sont des coefficients qui tiennent compte de l'influence des facteurs mentionnés ci-dessus,

z_g est la distance du centre de cisaillement au point d'application des charges transversales.

La contrainte de déversement critique élastique vaut :

$$\sigma_{cr,LT} = \frac{M_{cr,LT}}{W_{yy}}$$

où W_{yy} représente le module élastique de la section en flexion par rapport à l'axe le plus fort.

En plus de la plasticité du matériau et des contraintes résiduelles, les imperfections géométriques créent une perte de résistance par rapport à la charge critique élastique. On doit faire attention à toute imperfection capable de déclencher de la torsion et/ou de la flexion latérale. Une récente évaluation statistique de résultats de tests, mis en oeuvre pour préparer les documents de fond de l'Eurocode 3 a montré que la forme des courbes de résistance ultime pour le flambement des poteaux par flexion est tout à fait appropriée à la représentation de la réponse en déversement, à condition de calibrer correctement les paramètres de la courbe. Comme pour les formes précédentes de flambement, l'élanement normé de déversement est défini par :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,LT}}} \quad (10)$$

6. FLAMBEMENT DES COQUES

Le flambement des coques est probablement le phénomène d'instabilité le plus complexe. Analogue au voilement, il fait plutôt intervenir la forme de la section droite que le déplacement de la section droite considérée comme un tout. Les contraintes de compression, comme auparavant, peuvent naître des efforts normaux de compression, de la flexion et de charges concentrées appliquées localement. De plus, cependant, les coques peuvent aussi être soumises à des pressions internes ou externes (tuyaux, silos, réservoirs, poteaux supports des plates-formes offshore, etc.).

Le cas le plus simple à analyser est celui de la coque cylindrique chargée axialement (figure 11) ; la contrainte critique de flambement élastique est donnée par :

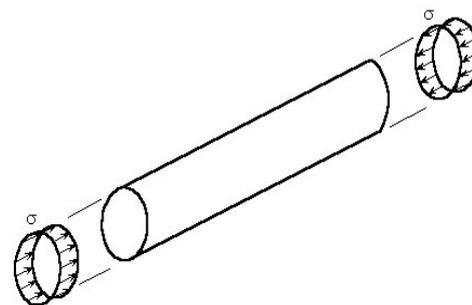


Figure 11 Axially compressed cylindrical shell

$$\sigma_{cr} = \left[\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right] \frac{E t}{r} \quad (11)$$

où t représente l'épaisseur de l'âme
et r le rayon du cylindre.

Cette formule est bien connue sous la forme $\sigma_{cr} = 0,605 E t / r$, applicable à des cylindres en acier. Le comportement effort - raccourcissement montre une perte drastique de la capacité porteuse dès que l'on atteint la charge critique de flambement (figure 12). Quand elle flambe, la coque tend vers une forme gauchie qui est en équilibre sous l'effet d'un effort extérieur de compression la plupart du temps beaucoup plus faible que la charge critique. C'est une caractéristique générale des coques, quel que soit le type de coque ou le type de chargement ; à la différence des plaques, elles ne sont pas capables de présenter une réserve de résistance postflambement.

Même de très faibles imperfections géométriques créent un écart prématuré de la courbe effort-déplacement de la coque parfaite donnant couramment une réduction significative de la capacité de résistance à la charge (figure 12). Les coques réelles ne peuvent donc pas atteindre la charge critique élastique.

L'influence des imperfections sur la charge ultime des coques est un problème très complexe qui a fait l'objet de recherches importantes.

L'objet de recherches importantes.

Selon la théorie classique du flambement des coques, la coque cylindrique parfaite peut flamber soit de manière axisymétrique - avec une succession d'anneaux - ou sous la forme d'un damier (figures 13a et 13b) ; en fonction des circonstances du flambement, la coque peut prendre une configuration postflambement en forme de diamant. Afin de prendre en compte les imperfections, les règles de conception utilisent traditionnellement un facteur de réduction, α qui s'applique à la contrainte de flambement de coque critique élastique ; les valeurs de α proviennent de tests réalisés sur des modèles à grande échelle.

Selon les Recommandations de la CECM, la valeur de ce facteur ne dépend que de l'élancement r/t de la coque sous réserve de conserver les imperfections en dessous d'un seuil donné. On applique un facteur de sécurité partielle supplémentaire, γ , au cas des coques cylindriques soumises à une compression méridienne à cause de leur comportement postflambement particulièrement défavorable.

L'influence des différents types

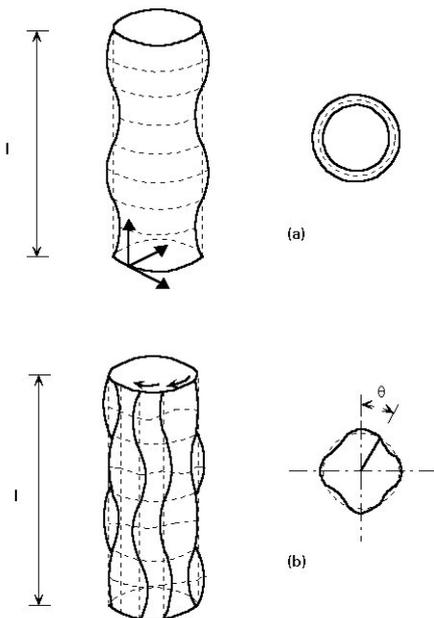


Figure 13 Buckled modes for cylinders under axial compression

d'imperfections sur la résistance ultime peut varier de façon importante selon le type de coque et le type de chargement. On peut définir une courbe de résistance normée en représentant le rapport σ/f_y par rapport à l'élancement normé $\bar{\lambda}_s = \sqrt{f_y/\alpha\sigma_{cr}}$, de façon analogue à l'approche utilisée pour les courbes relatives à la résistance des poteaux et des plaques (figure 14).

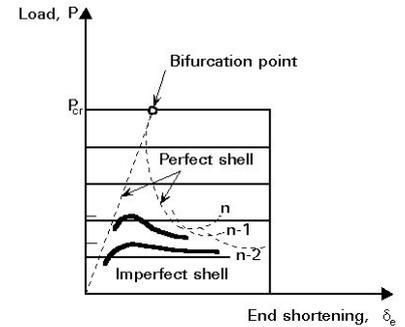


Figure 12 Behaviour of cylindrical shells under axial load

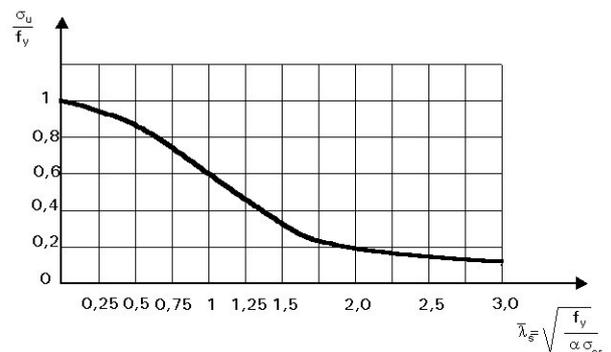


Figure 14 Effect of slenderness on the strength of cylindrical shells

Il faut noter que, si $\bar{\lambda}_s$ augmente, la courbe de résistance s'approche de la valeur critique de la résistance (réduite par le facteur α).

7. AMELIORATIONS DE LA RESISTANCE AU FLAMBEMENT

La résistance au flambement d'un élément ou d'un composant de section, peut être améliorée de plusieurs façons.

Pour une forme de flambement donnée, une réduction du rapport d'élançement se traduira par une charge ultime plus élevée. Ceci sera normalement réalisé en augmentant les dimensions de la section droite ; cela peut aussi être fait en répartissant le matériau de manière différente le long du centre de gravité, tout en gardant à la section droite une section constante ; en faisant cela, cependant, on peut changer la réponse de la section et/ou de l'élément, de telle sorte que d'autres formes de flambement puissent devenir critiques. En particulier, une diminution d'épaisseur de composants de section droite, afin de mieux répartir le matériau, a souvent pour conséquence un voilement, prépondérant d'un point de vue calcul. Une autre manière d'améliorer la résistance au flambement d'un élément est de lui fournir des maintiens de meilleure qualité ou supplémentaires, afin de modifier le mode de flambement. La charge critique élastique d'un poteau en compression axiale biarticulé, par exemple, est augmentée d'un facteur 4 si on ajoute un appui simple à mi-hauteur, de telle sorte que le poteau flambe dans un mode en deux demi-ondes sinusoïdales. De la même manière une poutre simplement appuyée, soumise à de la flexion par rapport à son axe le plus fort, est renforcée vis-à-vis du déversement en empêchant les rotations de flexion et/ou de torsion à ses supports d'extrémités, ou, plus simplement, en mettant un obstacle à tout déplacement latéral de la semelle en compression au moyen d'un entretoisement adéquat. La résistance ultime d'une plaque mince comprimée peut être améliorée de façon appréciable en fixant des raidisseurs longitudinaux et éventuellement transversaux ; à condition qu'ils soient assez rigides, la plaque flambra entre les raidisseurs, pour une contrainte critique élastique plus élevée. Le fait de raidir des structures en coques produira, de la même manière, une augmentation de la résistance.

Bien que la résistance de calcul soit plutôt reliée à la contrainte ultime qu'à la contrainte critique élastique, les commentaires ci-dessus peuvent, qualitativement être étendus à la capacité porteuse ultime.

8. INSTABILITE DE PORTIQUE

Quand on conçoit des poteaux comme des parties d'un portique, il peut être pratique d'isoler les poteaux du reste du portique et de traiter leur calcul comme des problèmes séparés. Cependant, la plupart des poteaux appartenant à des portiques de bâtiments subissent des actions de flexion appliquées à leurs extrémités, en plus des efforts normaux. Ces actions de flexion dépendent de l'interaction entre le poteau et ses éléments adjacents - poutres et poteaux. Dans certains cas, le poteau soutiendra les poutres à l'effondrement ; de telles situations se présentent quand les poutres sont conçues en plasticité et s'effondrent quand le poteau reste stable et élastique. Il y a d'autres situations où les poutres supportent le poteau ; c'est en particulier le cas quand les poutres sont conçues en élasticité et présentent un comportement élastique jusqu'à la ruine, cette dernière étant amorcée par l'instabilité du poteau.

La plupart du temps, les poteaux de portique apparaîtront comme des éléments encastrés de manière élastique, soumis à des efforts normaux et des couples d'extrémités combinés. On les appelle alors « éléments comprimés fléchis » (ou encore « poutres-colonnes » en Belgique ou en Suisse).

Dans la plupart des portiques de bâtiment, les déplacements d'ossature sont empêchés par des dispositifs de contreventement appropriés, par exemples des entretoises sur les façades, des escaliers, un noyau central en béton armé pour les réseaux en tous genres. Ensuite les extrémités du poteau doivent éviter de subir des déplacements horizontaux. La stabilité d'ossatures rigides se ramène à la stabilité de ses poteaux

individuels. Il est donc nécessaire d'avoir des règles appropriées concernant la résistance ultime d'éléments élastiques en compression maintenus soumis à des moments d'extrémités supplémentaires. Quelquefois des forces horizontales, dues au vent et à des séismes éventuels doivent être équilibrées par des actions de flexion sur le portique tout entier qui présente des déplacements horizontaux, augmentant la plupart du temps de la base au sommet. Ensuite les poteaux se déforment selon une forme en S, appelée flexion à double courbure. Les déplacements horizontaux permettent aux efforts dus aux poids propres de développer des moments fléchissants supplémentaires, appelés souvent moments secondaires car ils résultent de charges de poids qui agissent sur le portique déformé. Le terme secondaire est particulièrement mal adapté parce la grandeur de ces moments fléchissants secondaires peut rarement être négligée. Vérifier la stabilité du portique en considérant la stabilité des poteaux individuels apparaît alors plus comme une recette de cuisine que comme une procédure de calcul réfléchie, mais constitue une tentative de prise en compte de l'influence des effets du second ordre dans la structure en portique.

9. CONCLUSION

- Les caractéristiques de base des phénomènes de flambement des éléments qui ont été vus précédemment sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Phénomène de flambement	Type d'élément	Chargement	Paramètres De raideur	Rapport d'élançemen t	Élancement Normé
Flexion	poteaux	compression axiale	EI_{yy} ou EI_{zz}	L/i_x ou L/i_y	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr}}$
Torsion	poteaux (sections ouvertes avec symétrie double ou de point)	compression axiale	GI_t, EI_{ω}	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,T}}$
Flexion-torsion	poteaux (sections ouvertes avec symétrie double ou de point)	compression axiale	GI_t, EI_{ω} EI_{yy} et/ou EI_{zz}	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,FT}}$
Déversement	poutres	flexion sur l'axe le plus grand	$GI_t, EI_{\omega}, EI_{zz}$	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,LT}}$
Plaque	plaque mince ou composant d'élément	compression ou cisaillement	$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	b/t	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr}}$
Coque	coque cylindrique	compression axiale	-	r/t	$\sqrt{f_y/\alpha\sigma_{cr}}$

- Les manières les plus efficaces d'améliorer la résistance au flambement consistent à accroître les dimensions de la section droite et/ou d'utiliser un contreventement et des maintiens de manière à modifier le mode de flambement.
- La stabilité d'un portique à ossature rigide est contrôlée par la stabilité de ses poteaux individuels.
- La stabilité d'un portique à ossature souple est contrôlée par la rigidité de flexion des poteaux et des poutres et par la rigidité des liaisons poutres/poteaux.

10. LECTURES COMPLÉMENTAIRES

1. Ballio, G. et Mazzolani, F., "*Theory and Design of Steel Structures*", Chapman and Hall, London, 1983.
2. Dowling, P.J., Knowles, P. et Owens, G.W., "*Structural Steel Design*", Butterworths, London, 1988.
3. Galambos, T.V. (éditeur), "*Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*", John Wiley and Sons, New York, 1988.
4. McGuire, W., "*Steel Structures*", Prentice-Hall Inc. , Englewood Clifs, N.J., 1988.
5. Picard, A. et Beaulieu, D., "*Calcul des charpentes en acier*", Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.
6. CECM Recommendations of Steel Shells, Publication CECM n° 56, 1988.