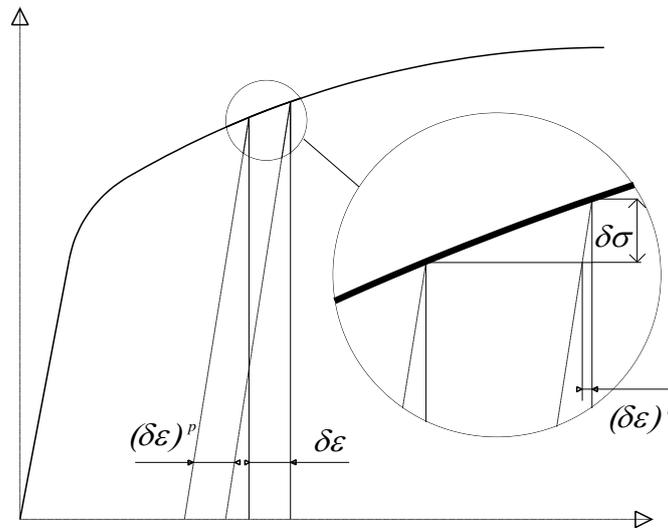
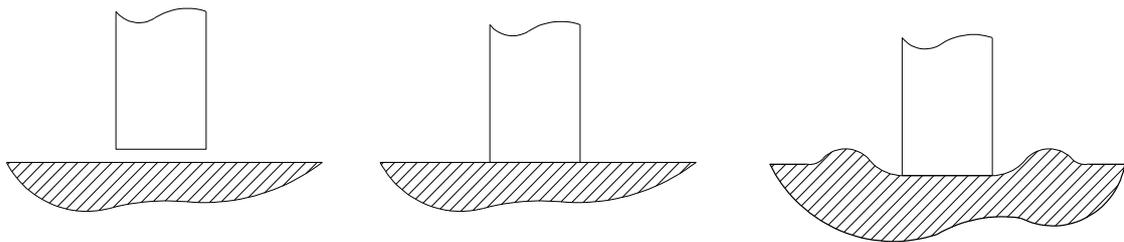


PLASTICITE



MISE EN FORME

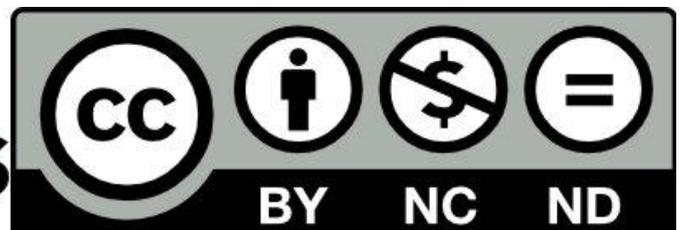


M.MAYA

maya@mmaya.fr

www.mmaya.fr

 **creative
commons**



AVANT PROPOS

Ceci n'est absolument pas le résultat de mes travaux personnels mais au contraire une simple concaténation de travaux réalisés par différentes personnes dans différents endroits.

C'est pourquoi je me suis autorisé à reprendre, parfois in extenso, des termes, des phrases ou des paragraphes complets trouvés dans les ouvrages cités en référence. J'espère que les auteurs des dits ouvrages, s'ils se reconnaissent, voudront bien m'excuser de crime de lèse majesté. Je ne suis qu'un modeste utilisateur de la science développée et approfondie par d'autres.

C'est aussi pourquoi ce document de quelques pages est accompagné d'une bibliographie non limitative qui permettra au lecteur resté sur sa faim d'assouvir son appétit de connaissance.

Cluny, Novembre 2008

M. MAYA

SOMMAIRE

<i>LOIS DE COMPORTEMENT - ANISOTROPIE</i>	8
1- GENERALITES	8
2- LES ESSAIS MECANIQUES	9
3- MODELES RHEOLOGIQUES	10
3-1 Modèles parfaits	11
3-2 Elasticité	11
3-3 Viscoélasticité	12
3-4 Plasticité	13
3-4-1 Solide rigide parfaitement plastique	13
3-4-2 Solide élastique linéaire parfaitement plastique	13
3-4-3 Solide élastoplastique écrouissable	13
3-5 Viscoplasticité	14
4- ANISOTROPIE	15
4-1 Origine de l'anisotropie	15
4-1-1 Anisotropie de structure	15
4-1-2 Anisotropie d'élaboration	15
4-2 Expérimentation sur les matériaux anisotropes	16
5- ANISOTROPIE EN ELASTICITE LINEAIRE	16
5-1 Les tenseurs d'élasticité	16
5-2 Convention d'écriture	17
5-3 Matériau isotrope	19
5-4 Matériau orthotrope	19
5-5 Matériau isotrope transverse	21
6- UTILISATION DES MATERIAUX ANISOTROPES	22
<i>PLASTICITE</i>	23
1- GENERALITES	23
2- RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS	23
2-1 Rappels sur l'état de contrainte	23
2-1-1 Base principale - Invariants	24
2-1-2 Tenseur déviateur des contraintes	24
2-2 Rappels sur l'état de déformation	25
2-2-1 Cas des petites déformations	25
2-2-2 Cas des grandes déformations	26
2-2-3 Déviateur du tenseur des déformations actuelles	27
2-3 Relations entre contraintes et déformations	27
3- CRITERES DE PLASTICITE	28
3-1 Position du problème	28

3-2	Surfaces et fonctions de charge	28
3-3	Principe de Hill	29
3-4	Critère de Von-Misès	30
3-4-1	Incompressibilité plastique	31
3-4-2	Contrainte équivalente	31
3-4-3	Expression du coefficient de proportionnalité	32
3-4-4	Déformation actuelle plastique équivalente	32
4-	RELATIONS DE HENCKY-MISES	32
4-1	Hypothèse d'écroûissage	33
4-2	Relations de PRANDTL - REUSS	33
4-3	Relations de HENCKY - MISES	34
5-	EXEMPLES	35
5-1	Exemple dans le cas d'un essai de traction	35
5-2	Traction et torsion d'un tube mince	36
<i>LES ETATS D'APPROXIMATIONS</i>		38
1-	PLASTICITE PARFAITE	38
1-1	Matériau élastique parfaitement plastique	38
1-2	Matériau rigide parfaitement plastique	39
1-3	Rotule plastique	39
1-3-1	Elastique parfaitement plastique	39
1-3-2	Rigide parfaitement plastique	39
2-	LES METHODES D'ENCADREMENT	40
2-1	Rappels	40
2-2	Définitions	40
2-3	Théorème statique ou de la borne inférieure	41
2-4	Théorème cinématique ou de la borne supérieure	41
3-	APPLICATIONS A LA MISE EN FORME	43
3-1	Méthode des tranches	43
3-1-1	Idées générales	43
3-1-2	Forgeage d'une barre	43
3-2	Méthode de la borne supérieure	46
3-2-1	Choix des déplacements	46
3-2-2	Calcul de l'énergie dissipée	48
3-2-3	Calcul de la force motrice	50
3-2-4	Remarques	50
3-3	Méthode de la borne inférieure	50
3-4	Conclusions	52
<i>THERMOMECHANIQUE</i>		53
1-	LES LOIS DE CONSERVATION	53
1-1	Expression générale d'une loi de conservation	53
1-2	Equation de continuité	55
1-3	Loi fondamentale de la mécanique	55

Michel MAYA
Enseignant en école d'ingénieur retraité

1-4	Premier principe de la thermodynamique	56
1-5	Deuxième principe de la thermodynamique	57
2-	THERMOMECHANIQUE DES MILIEUX CONTINUS	58
2-1	Equation de la chaleur	59
2-2	Thermo-élasticité linéaire	59
3-	COMPORTEMENT PLASTIQUE	61
3-1	Comportement plastique expérimental	61
3-1-1	Compression hydrostatique	61
3-1-2	Traction uniaxiale	62
3-2	Modélisations courantes	63
3-3	Principaux critères utilisés	64
3-3-1	Forme générale d'un critère de plasticité	64
3-3-2	Critère de Tresca	65
3-3-3	Critère de Von Misès	65
3-4	LOIS D'ECOULEMENT	66
3-4-1	Loi de Schmid	66
3-4-2	Principe du travail maximal	66
3-4-3	Loi d'écoulement associée au critère de Tresca	67
3-4-4	Loi d'écoulement associée au critère de Von Misès	68
4-	RHEOLOGIE	69
4-1	Caractéristiques rhéologiques des métaux	69
4-1-1	Influence de l'écroutissage	70
4-1-2	Influence de l'élasticité	70
4-1-3	Influence de la température	70
4-1-4	Influence de la vitesse de déformation	71
4-1-5	Conclusions	72
4-2	Modélisation de la rhéologie	72
4-2-1	Prise en compte de l'écroutissage	72
4-2-2	Prise en compte de l'anisotropie	74
4-2-3	Modélisation du comportement viscoplastique	76
4-2-4	Modélisation du comportement élasto-viscoplastique	77
 LES METHODES VARIATIONNELLES		78
1-	DIFFERENTES FORMULATIONS	78
1-1	Introduction	78
1-2	Exemple	78
1-2-1	Approximation du déplacement par une fonction linéaire.	79
1-2-2	Approximation du déplacement par une fonction quadratique	80
1-2-3	Conclusions	81
2-	FORMULATION INTEGRALE D'UN PROBLEME	81
2-1	Définitions	81
2-1-1	Opérateurs	81
2-1-2	Fonctionnelle	82
2-1-3	Produit scalaire	82
2-1-4	Opérateur symétrique	82
2-1-5	Opérateur défini positif	84
2-2	Théorème du minimum	84
2-2-1	Enoncé	84
2-2-2	Démonstration	84

Michel MAYA
Enseignant en école d'ingénieur retraité

2-2-3	Remarques	85
2-3	Théorème de la forme bilinéaire	86
2-3-1	Enoncé	86
2-3-2	Démonstration	86
2-4	Formulations variationnelles des problèmes d'élasticité	87
2-4-1	Théorème des puissances virtuelles	87
2-4-2	Théorème du minimum généralisé	89
2-5	Formes intégrales	89
2-5-1	Généralités	89
2-5-2	Méthode des résidus pondérés	90
2-5-3	Forme intégrale faible	90
3	APPLICATION A LA M.E.F.	90
3-1	Présentation	91
3-2	Discrétisation	91
3-2-1	Forme intégrale	91
3-2-2	Forme variationnelle	93
3-2-3	Conditions aux limites	93
3-3	Cas non linéaires	94
3-3-2	Algorithme de Newton-Raphson modifié	96
3-3-3	Méthode de Newton-Raphson	96
3-3-4	Méthode incrémentale	97
3-4	Cas instationnaires	97

FORMULATIONS ELASTOPLASTIQUE ET VISCOPLASTIQUE 99

1-	RAPPEL DES EQUATIONS	99
1-1	Théorème des puissances virtuelles	99
1-2	Loi de comportement	100
1-3	Discrétisation temporelle	100
2-	INTEGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT	101
2-1	Découplage déviateur - pression	101
2-2	Loi élastoplastique	102
2-2-1	Solution analytique de référence	102
2-2-2	Méthodes numériques avec reprojction sur le critère	104
2-3	Solution numérique avec consistance plastique	105
2-3-1	Ecriture d'une équation scalaire	105
2-3-2	Résolution de l'équation scalaire	107
3-	LA VISCOPLASTICITE	108
3-1	Le modèle de comportement	108
3-2	Le potentiel viscoplastique	109
3-3	Le modèle de frottement	111
3-4	Résolution analytique	112
3-5	Résolution numérique	114
3-5-1	Formulation variationnelle	114
3-5-2	Formulation de l'incompressibilité	115
3-5-3	Discrétisation temporelle	115
3-5-4	Discrétisation spatiale	116
3-5-5	Résolution du système	117

LOIS DE COMPORTEMENT

ANISOTROPIE

1- GENERALITES

Les équations générales de la physique (conservation de la masse, principe fondamental de la mécanique, principes de la thermodynamique ...) ne suffisent pas pour déterminer les champs de contraintes ou de déplacement dans une structure. Le constat est le suivant:

Inconnues

tenseur des contraintes	$\underline{\underline{\sigma}}$	6 inconnues
tenseur des déformations	$\underline{\underline{\varepsilon}}$	6 inconnues
champ de déplacement	\vec{U}	3 inconnues

Equations

relations déformations-déplacement	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \vec{U} + \underline{\underline{Grad}} \vec{U}^T \right)$	6 équations
équations d'équilibre	équations de moment $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$	3 équations
	équations de résultante $\vec{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}$	

Un déficit du nombre d'équations vis à vis du nombre d'inconnus apparaît. Il est donc nécessaire d'employer des relations expérimentales pour compléter la modélisation. On obtient ainsi les *équations de comportement*. Ces dernières relient les contraintes aux déformations et permettent d'avoir suffisamment d'équations pour solutionner le problème.

A ce niveau de l'étude on peut faire deux remarques:

Remarque N°1 Les équations précédentes étant des équations différentielles, il est nécessaire de bien préciser les conditions aux limites pour pouvoir définir les constantes d'intégrations. Suivant la nature du problème posé, il peut être parfois indispensable de se donner aussi des conditions initiales (comportement fonction du temps, étude dynamique ...).

Remarque N°2 Les 6 équations de comptabilité $\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} \right)$ ne sont pas des équations supplémentaires. Elles ne sont utilisées que pour vérifier l'intégrabilité du champ des déformations.

Pour procéder à l'identification du comportement d'un matériau, on ne peut que tester des éprouvettes. Il faut donc noter que les informations dont on dispose concernent une structure particulière (l'éprouvette) et que les mesures sont globales (effort, couple, déplacement d'ensemble ...). En définitive la loi de comportement élaborée n'est vérifiée que globalement.

2- LES ESSAIS MECANQUES

La méthode phénoménologique globale est l'étude des relations de cause à effet qui existent entre les variables physiquement accessibles. Elle n'est pas la seule méthode utilisable pour caractériser le comportement du matériau. Pour mémoire on peut citer l'approche microscopique qui consiste à modéliser les mécanismes à partir d'une étude des liaisons atomiques. On effectue alors une intégration et une moyennisation des variables microscopiques pour avoir le comportement macroscopique. De même on peut faire référence à la méthode thermodynamique qui utilise des variables internes (potentiels thermodynamiques ...) associées à un milieu continu homogénéisé.

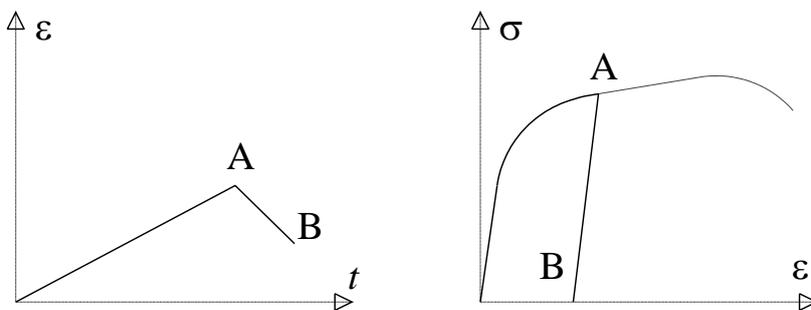
Les variables physiquement accessibles sont :

- * les déformations et leurs vitesses. C'est en fait souvent des déplacements que l'on mesure et il convient de traiter l'information pour aboutir à des déformations
- * les contraintes. On peut aussi constater que souvent l'information directe est une valeur d'effort. Le passage à une contrainte n'est pas toujours immédiat. On peut d'ailleurs à ce niveau s'interroger sur la nature de la contrainte (Cauchy? Piolat-Kirchoff?).
- * la température. Ce paramètre n'est pas forcément distribué de façon homogène.
- * le temps. Cette variable peut aussi prendre des formes diverses et variées (nombre de cycles ...).

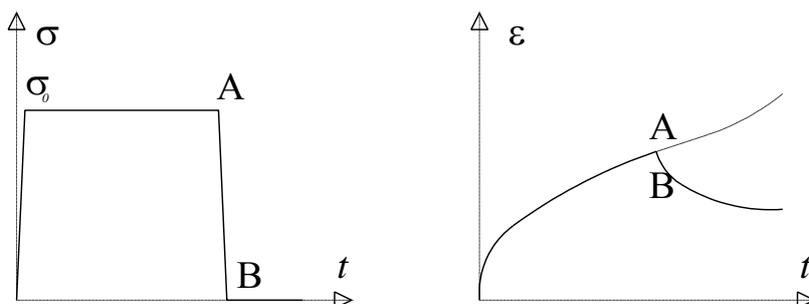
Il faut aussi remarquer que les notions de déformation et de contrainte font apparaître l'aspect tensoriel. En général on accédera à une mesure qui n'est qu'une partie d'un tout. Dans la réalité, il faut établir des relations entre tenseurs.

Les essais effectués sur les éprouvettes n'ont pour but que de trouver une relation entre un paramètre de charge Q et un paramètre de déformation q .

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simples à température constante. L'éprouvette est soumise à une sollicitation axiale. La forme de l'éprouvette est calculée de telle sorte que l'on obtienne un état de contrainte ou de déformation uniformes dans le volume utile. Il existe plusieurs façons de piloter l'essai.

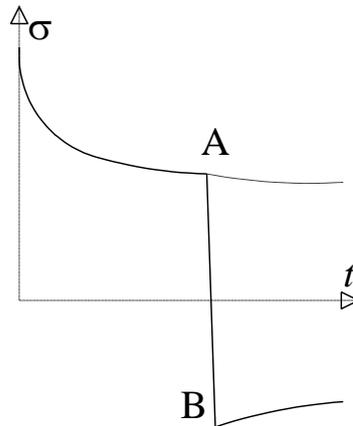
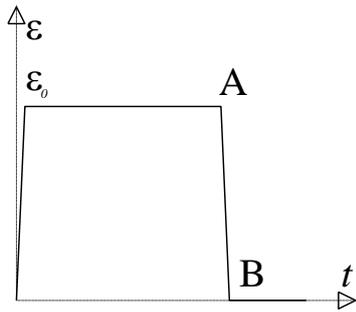


Dans l'essai d'écroissage en traction ou compression simples, la vitesse de déformation est constante. C'est l'essai le plus couramment utilisé.



Dans l'essai de fluage en traction ou compression simples, on étudie le comportement de l'éprouvette lorsque la contrainte appliquée est maintenue constante. L'évolution de la déformation permet de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau.

Cet essai est souvent réalisé à une température parfaitement contrôlée ($\pm 1^\circ$). Pour une contrainte donnée, on enregistre la vitesse de déformation et le temps à rupture.



Dans l'essai de relaxation en traction ou compression simples, on étudie l'évolution des contraintes en imposant une déformation constante.

Les essais de rupture sont en fait les essais précédents poussés jusqu'à la ruine totale de l'éprouvette. Ils peuvent être combinés avec des sollicitations cycliques. Certains essais nécessitent des éprouvettes et des moyens particuliers (essais de résilience de type Charpy, essais de ténacité ...).

Dans l'essai de flexion (3 points ou 4 points), on génère simultanément des contraintes de traction et des contraintes de compression. Il est fréquemment employé pour effectuer des contrôles de qualité.

L'essai de torsion est tout particulièrement utilisé pour l'étude de la déformation à haute température des alliages métalliques. De plus cet essai permet d'accéder à certaines caractéristiques élastiques des matériaux anisotropes.

L'essai de dureté très simple à mettre en oeuvre est couramment employé comme moyen de contrôle. Des relations empiriques existent entre la dureté et la résistance à la traction, toutefois ces relations sont restrictives.

Enfin, du fait que la loi de comportement d'un matériau ne peut se borner à une simple relation entre une seule contrainte, une seule déformation et le temps, il devient de plus en plus nécessaire de réaliser des essais multidimensionnels ou multiaxiaux. On trouvera ainsi des essais de traction-cisaillement, traction ou compression bi ou triaxiale. Pour les matériaux anisotropes, l'essai de traction-cisaillement par traction-torsion représente un grand intérêt. Hélas ces essais sont relativement onéreux. Pour mémoire, on peut mentionner que le L.M.T. (Laboratoire de Mécanique et de Technologie) de Cachan a acquis une machine de traction triaxiale en 1992 pour la somme de 8 MF.

L'avantage certain de ces derniers essais est qu'ils nous permettent de mieux connaître la relation entre les états tensoriels de contrainte et de déformation (ou de vitesse de déformation).

3- MODELES RHEOLOGIQUES

Les résultats d'essais ne présentent un intérêt que si l'on peut **modéliser le comportement du matériau**. Cette modélisation, nécessaire pour le calcul prévisionnel, peut être multiple. On peut ainsi définir un modèle mathématique sous forme d'équations, mais on peut aussi envisager la recherche d'une modélisation analogique. Cette dernière est souvent utilisée à des fins didacticielles.

Les règles de calcul sont les suivantes :

Dans une association en parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche et la déformation subie par l'ensemble est égale aux déformations subies par chacune des branches, ces dernières déformations étant toutes identiques.

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad \varepsilon = \varepsilon_i$$

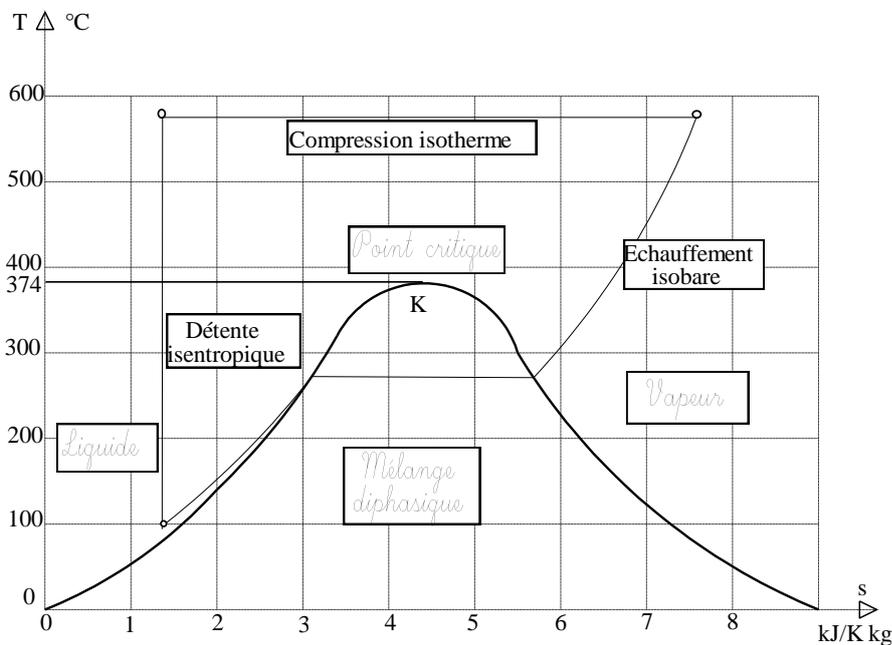
Dans une association en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément et la déformation subie par l'ensemble est la somme des déformations subies par chaque élément.

$$\sigma = \sigma_i \quad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

La forme de la relation contrainte-déformation nous permettra un tri dans l'une des grandes classes de comportement.

3-1 Modèles parfaits

Ces modèles sortent du cadre de la mécanique des solides déformables. On parle de solide parfaitement rigide et de fluide parfait. Ces modèles permettent d'approcher les lois de mouvements mais ne peuvent en aucun cas prétendre aider à un quelconque dimensionnement.

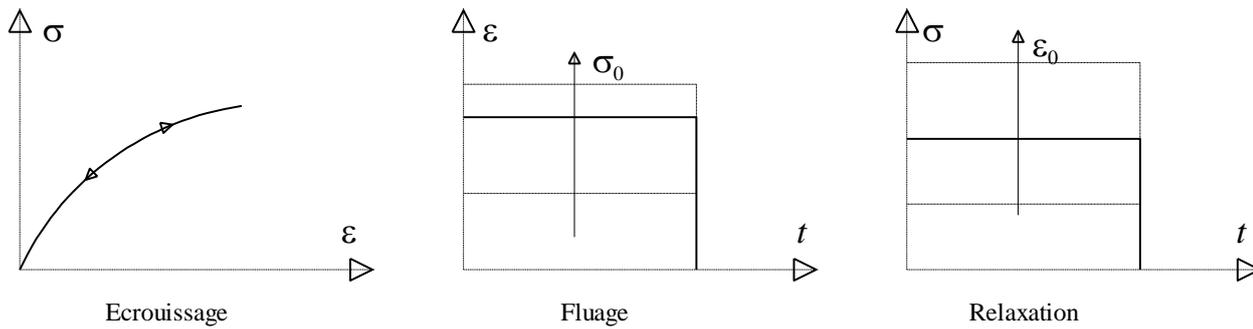


Il est à noter que la distinction entre solide, liquide ou gaz est subjective. Ainsi on peut envisager de dire que les solides admettent un état d'équilibre sous sollicitation alors que les fluides subissent un écoulement pour toute sollicitation aussi faible soit-elle. Comment alors distinguer un équilibre atteint au bout d'un temps infini et un écoulement infiniment lent?

De même, le diagramme (T,s) d'un corps pur montre clairement qu'il est difficile de distinguer l'état liquide de l'état gazeux pour des températures élevées.

3-2 Elasticité

La relation d'élasticité se traduit par une déformation essentiellement réversible. On parle d'élasticité parfaite lorsque la transformation est entièrement réversible et qu'il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge Q et de déformation q ($f(Q, q) = 0$).



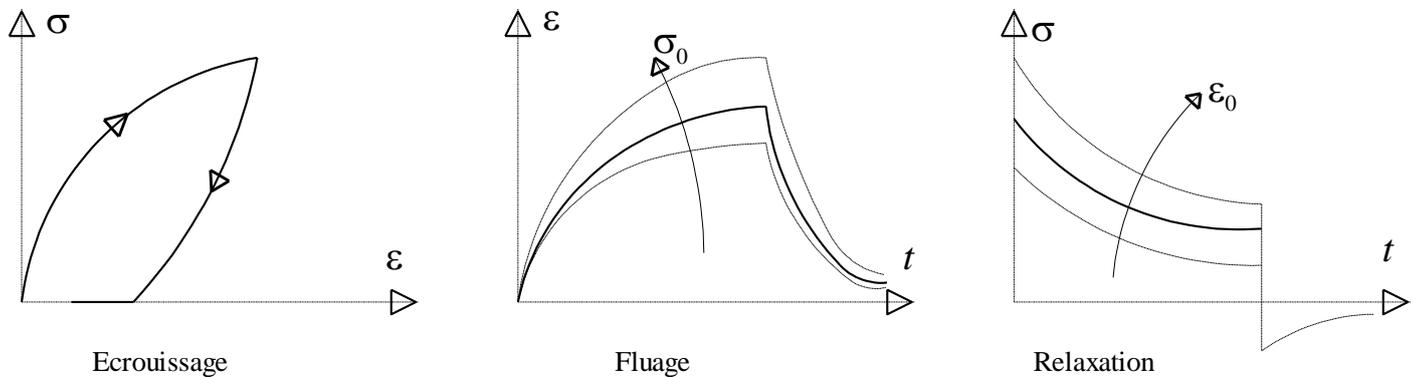
Si de plus la relation est linéaire, on obtient l'élasticité linéaire. Le modèle analogique équivalent est alors le ressort linéaire :



Ce modèle convient bien pour les métaux, les roches et les bétons lorsque les sollicitations sont faibles (ne pas dépasser la limite d'élasticité!)

3-3 Viscoélasticité

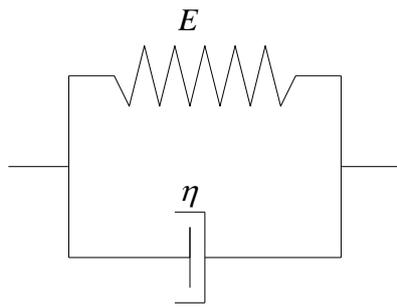
La réponse est fonction de la vitesse d'application de la sollicitation. Il existe des résistances visqueuses qui font que pour un paramètre de déformation fixé q , le paramètre de chargement Q est une fonction croissante de la vitesse d'application de la déformation \dot{q} .



On dit qu'il y a viscosité pure lorsqu'il existe une relation biunivoque entre le paramètre de chargement Q et le paramètre vitesse d'application de la déformation \dot{q} ($g(Q, \dot{q})=0$). De plus nous pouvons avoir une relation linéaire ce qui nous conduit à la viscosité linéaire avec l'amortisseur linéaire comme modèle analogique :



Il est possible d'envisager un modèle plus complet en associant en parallèle un ressort et un amortisseur. On définit ainsi le modèle de Kelvin-Voigt :



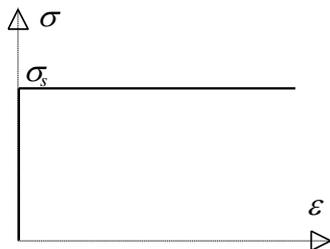
$$\begin{cases} \sigma_1 = E \varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et/\eta})$$

Les applications sont les polymères, le caoutchouc et le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

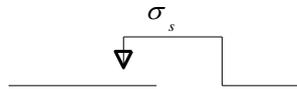
3-4 Plasticité

Ce phénomène traduit l'apparition de déformations irréversibles lorsque la charge est suffisamment grande. Il faut dépasser le seuil de plasticité. Ainsi, après cessation des sollicitations, on constate des déformations permanentes stables. Le temps n'est pas une variable de l'état de déformation. Ce comportement admet plusieurs formes.

3-4-1 Solide rigide parfaitement plastique



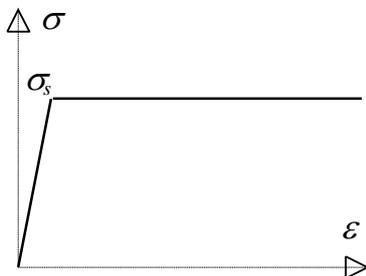
En deçà du seuil de plasticité, la déformation est nulle. Dès que l'on a atteint le seuil, appelé contrainte d'écoulement, la valeur de la déformation est arbitraire, quelle que soit la vitesse de déformation. Le modèle analogique associé est le patin.



$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s & \varepsilon = 0 \\ |\sigma| = \sigma_s & \varepsilon = ? \end{cases}$$

On trouve les applications en mécanique des sols et en mise en forme des métaux.

3-4-2 Solide élastique linéaire parfaitement plastique



En deçà du seuil de plasticité, le comportement est élastique linéaire. Au delà, on retrouve le comportement précédent. On associe le modèle rhéologique de Saint-Venant à ce comportement.

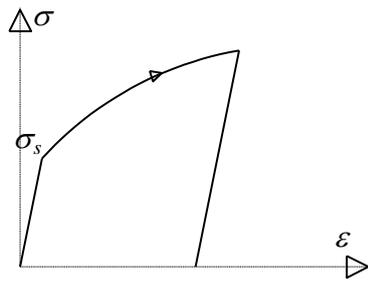


$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ |\sigma| = \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \text{ (arbitraire)} \end{cases}$$

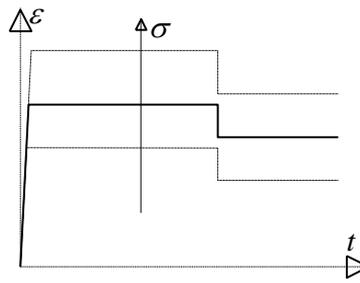
Ce type de comportement permet de traiter des problèmes d'analyse limite (ruine d'une structure par rotule plastique ...) ou pour certain type d'acier à faible teneur en carbone.

3-4-3 Solide élastoplastique écrouissable

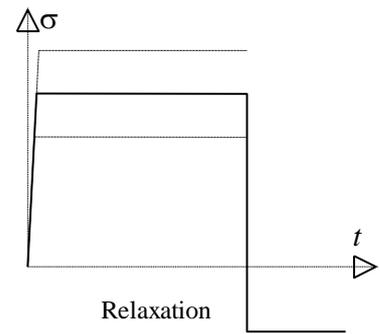
On voit apparaître une déformation permanente au delà d'un seuil de contrainte σ_s .



Ecrouissage



Fluage

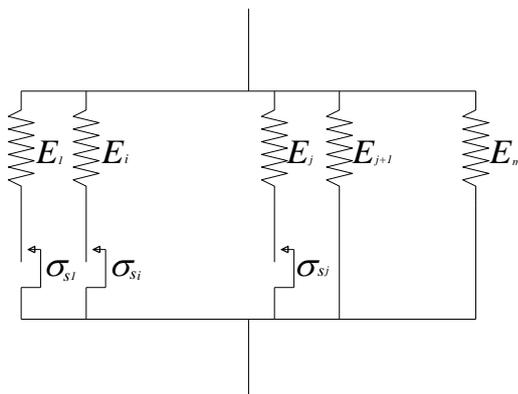


Relaxation

Le comportement est donné par les relations suivantes :

$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ |\sigma| \geq \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma) \end{cases}$$

Le modèle analogue associé est le modèle de Saint-Venant généralisé. Il est réalisé par des montages séries et parallèles de ressorts et de patins.



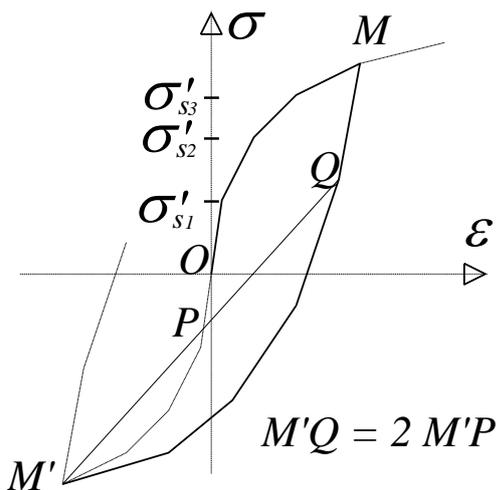
La courbe de traction du modèle est linéaire par morceaux. En supposant les seuils σ_{si} rangés dans un ordre croissant, l'équation au seuil d'indice j est :

$$\begin{cases} \sigma = \sum_{i=1}^j \sigma_{si} + \sum_{i=j+1}^m E_i \varepsilon \\ \varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma_{si}}{E_i} + \varepsilon_{pi} & \text{si } \sigma_i = \sigma_{si} \\ \frac{\sigma_i}{E_i} & \text{si } \sigma_i < \sigma_{si} \end{cases} \end{cases}$$

Ce modèle présente la particularité d'avoir une courbe d'écrouissage de décharge après une traction qui se déduit de la courbe d'écrouissage en compression par une homothétie de rapport 2 et de centre M' symétrique du point de décharge M par rapport à l'origine O .

$$\sigma'_{sj} = \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_{si} + \frac{\sigma_{sj}}{E_j} \sum_{i=j}^m E_i$$

Ce comportement se retrouve dans des métaux et alliages à des températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion.



3-5 Viscoplasticité

Ce comportement traduit le fait que l'on a des déformations permanentes après suppression des sollicitations (plasticité) et qu'il existe un écoulement de fluage sous sollicitation (viscosité). Il est possible de faire apparaître des phénomènes d'élasticité et éventuellement l'influence de l'écroutissage.

4- ANISOTROPIE

4-1 Origine de l'anisotropie

En fait on devrait plutôt dire pourquoi on recherche à établir des lois de comportement isotrope. Tous les matériaux sont anisotropes et, par souci de simplification, le mécanicien essaie d'apporter une loi de comportement isotrope. Une erreur systématique est commise, mais suivant le matériau, cette erreur est plus ou moins élevée. En général le comportement sera considéré comme isotrope, mais il existe des cas où l'erreur associée à cette hypothèse est beaucoup trop élevée pour quelle soit acceptable.

L'isotropie est la caractérisation du fait que la loi de comportement du matériau étudiée est indépendante du système d'axe. On traduit ainsi l'équivalence de toutes les directions. Dans la réalité l'anisotropie constatée peut être liée soit à la structure propre du matériau, soit à son procédé d'élaboration et de mise en forme.

4-1-1- Anisotropie de structure

On la rencontre naturellement. Parmi les cas les plus fréquents on peut citer :

les monocristaux métalliques. Par la nature même des liaisons inter-atomiques, le monocristal est anisotrope. Toutefois, la juxtaposition aléatoire d'un grand nombre de monocristaux permet d'obtenir un comportement global de structure isotrope.

les matériaux composites. Dans cette catégorie on peut inclure en particulier le béton armé et les matériaux composites stratifiés.

les matériaux fibreux naturellement. On trouvera entre autre le bois.

4-1-2- Anisotropie d'élaboration

Certains matériaux, considérés initialement comme isotropes perdent cette propriété dans le processus de réalisation. On peut par exemple citer les profilés obtenus par déformations plastiques ainsi que les tôles laminées.

Comme on peut le constater, l'anisotropie est bien présente et il est important d'être capable d'en tenir compte au niveau des lois de comportement. On peut faire deux remarques :

* Il ne faut pas confondre l'anisotropie et l'hétérogénéité d'un matériau. Ces deux aspects sont souvent reliés et la confusion est aisée. L'hétérogénéité d'un matériau traduit le fait que le comportement du matériau est fonction du point d'étude. Toujours présente, cette propriété peut être remplacée par la notion d'homogénéité par des processus de moyennisation. On définit alors un comportement moyen sur un ensemble de points. Bien entendu les résultats seront beaucoup plus fonction de l'erreur commise. Physiquement, on conçoit facilement qu'il est possible de définir un comportement homogène pour de l'acier (d'autant plus que les résultats d'essais sont souvent globaux), par contre on envisage mal le même type de comportement sur du béton armé. La notion d'échelle de l'hétérogénéité par rapport aux dimensions de la structure est un paramètre particulièrement important pour procéder à une homogénéisation.

* L'anisotropie peut aussi concerner un comportement élastique que tout autre type de comportement. Dans les faits, par souci de simplicité, on introduira l'anisotropie simplement sur les lois élastiques, mais il ne faut pas penser que seul ce type de comportement présente cette caractéristique. Ainsi un comportement initial de type élastique isotrope peut très bien se transformer en un comportement plastique anisotrope, l'anisotropie provenant du glissement des joints cristallographiques.

4-2 Expérimentation sur les matériaux anisotropes

Les difficultés expérimentales sont plus grandes qu'avec les matériaux considérés comme isotropes. Ainsi le résultat d'un essai de traction sera dépendant de l'orientation de l'éprouvette dans la structure. Ce résultat restera simple à interpréter lorsque l'essai est réalisé dans une direction principale d'anisotropie.

L'anisotropie se traduit par exemple par le fait que le chargement de pression hydrostatique $(\bar{\sigma} = -p\bar{I})$ n'engendre pas une déformation homogène. Non seulement on aura dans la matrice représentant le tenseur des déformations des termes diagonaux différents $(\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33})$, mais en plus on pourra trouver hors de la diagonale des termes non nuls.

De même l'essai de torsion sur éprouvette creuse peut conduire à des déformations de cisaillement non uniformes sur la circonférence.

Il est donc pratiquement toujours nécessaire de faire une modélisation particulière pour pouvoir interpréter correctement les résultats.

Il est enfin important de noter que le nombre d'essais à réaliser pour caractériser le comportement d'un matériau anisotrope est souvent plus élevé que pour un matériau isotrope.

5- ANISOTROPIE EN ELASTICITE LINEAIRE

L'élasticité linéaire est la loi de comportement la plus couramment employée. D'une part elle reflète bien le comportement à faible déformation de nombreux matériaux, d'autre part de nombreuses lois de comportement sont numériquement traitées comme étant localement linéaires. On approche ainsi la loi réelle par une suite de segments de droite.

Il est donc tout naturel de s'intéresser à l'incidence de l'anisotropie sur la réponse d'un matériau élastique linéaire.

Il faut toutefois noter que de nombreux paramètres peuvent avoir de l'incidence sur le comportement élastique linéaire. La température, du fait de l'agitation moléculaire qu'elle engendre, est propice à l'apparition de phénomènes irréversibles. A l'inverse, le phénomène d'écrouissage augmente sensiblement la taille du domaine élastique.

5-1 Les tenseurs d'élasticité

Le comportement élastique linéaire est caractérisé par une relation de linéarité entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Cette relation prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{K} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} = \bar{a} \bar{\sigma} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bar{K} \text{ tenseur des raideurs} \\ \bar{a} \text{ tenseur des complaisances} \end{array}$$

Les tenseurs ainsi déterminés représentent des applications inverses l'une de l'autre. La connaissance de l'un implique la connaissance de l'autre. Aussi nous ne nous intéresserons qu'à l'un des deux, à savoir le tenseur des raideurs ou encore tenseur de rigidité.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Avec nos hypothèses, c'est à dire théorie du premier ordre pour les contraintes, petites perturbations pour les déplacements, les tenseurs des contraintes et des déformations sont des tenseurs du second ordre symétriques. Donc le tenseur des raideurs, qui est un tenseur du quatrième ordre, présente des particularités :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ et } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ et } \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{ijkl} = K_{jikl} \\ K_{ijkl} = K_{ijlk} \end{cases}$$

Ainsi le nombre de fonctions indépendantes caractérisant le tenseur de raideur passe de 81 à 36.

Pour continuer les simplifications, il suffit de dire que le comportement élastique est un comportement sans dissipation, c'est à dire que toutes les évolutions sont réversibles. En particulier la dissipation thermique est nulle. L'application du premier principe de la thermodynamique nous permet alors d'affirmer que le travail de déformation est égal au potentiel élastique, si la variation d'énergie cinétique est nulle:

$$\delta W_{def} + \delta Q_e = \delta W_{def} = dU$$

Ce travail de déformation est donc une fonction d'état. Sa différentielle est une différentielle totale exacte et on peut appliquer les relations d'intégrabilité de Cauchy. Ce travail de déformation a l'expression volumique suivante :

$$\frac{dW_{def}}{dv} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

La condition de différentielle totale exacte nous permet alors d'écrire les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow K_{ijkl} = K_{klij}$$

Ainsi le nombre de fonctions indépendantes pour représenter le tenseur de raideur passe de 36 à 21. Dans le cas le plus général, il conviendra donc de trouver les essais de caractérisation de ces 21 fonctions.

Dans la pratique ces fonctions sont dépendantes de la température et du temps (vitesse d'application des charges). Comme on travaille en général dans des plages de température bien définies, relativement limitées et que ces fonctions sont faiblement dépendantes de la température, on peut facilement les assimiler à des coefficients constants pour une cinétique donnée.

L'identification de ces coefficients élastiques repose sur l'évaluation de la raideur dans des essais statiques (traction-compression, torsion ...), dans des essais de vibrations ou dans des essais de propagation d'ondes. On constate une différence au niveau des résultats donnés par ces essais. Cet écart s'explique car les méthodes dynamiques ne permettent pas de prendre en compte certains mouvements internes visqueux et de ce fait donnent des rigidités un peu plus grandes.

5-2 Convention d'écriture

Le tenseur de raideur est un tenseur d'ordre 4. Il est donc particulièrement délicat à expliciter. Les formules développées sont relativement lourdes. Il convient donc de trouver une méthode qui permette une simplification d'écriture.

La solution réside en des applications linéaires. L'une va nous permettre de passer de l'espace vectoriel de dimension 2 associé aux tenseurs d'ordre 2 vers un espace vectoriel de dimension 1 auquel on associera des tenseurs d'ordre 1. Pour le tenseur des contraintes, cette application se présente sous la forme suivante :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix}$$

Par contre pour le tenseur des déformations, on préfère utiliser l'application définie par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

Ces transformations sur les tenseurs des contraintes et des déformations induisent l'existence d'une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension 4 (associé au tenseur de raideur) vers un espace vectoriel de dimension 2 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon}$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Compte tenu des conditions d'intégrabilité de Cauchy sur le travail de déformation, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{21} & c_{14} &= 2c_{41} & c_{24} &= 2c_{42} & c_{34} &= 2c_{43} & c_{45} &= c_{54} \\ c_{13} &= c_{31} & c_{15} &= 2c_{51} & c_{25} &= 2c_{52} & c_{35} &= 2c_{53} & c_{46} &= c_{64} \\ c_{23} &= c_{32} & c_{16} &= 2c_{61} & c_{26} &= 2c_{62} & c_{36} &= 2c_{63} & c_{56} &= c_{65} \end{aligned}$$

Ces relations étant au nombre de 15, nous nous retrouvons bien avec 21 coefficients indépendants.

La structure de la matrice C devient alors :

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} X_{ij} & \vdots & 2Z_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{ij} & \vdots & Y_{ij} \end{pmatrix}$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Les sous-matrices X , Y et Z étant des matrices (3,3), les matrices X et Y étant symétriques.

Les hypothèses supplémentaires portant sur le degré d'anisotropie du matériau vont nous permettre de diminuer le nombre des coefficients indépendants.

Ces hypothèses portent essentiellement sur les symétries et rotations possibles sans changement de la loi de comportement. L'invariance du comportement dans un certain type de changement de base ne sera en effet vérifiée qu'avec des relations particulières du tenseur de raideur.

Pour mettre en évidence ces relations on rappelle les règles de transformation des composantes d'un tenseur dans un changement de bases orthonormées :

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \leftrightarrow (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) \quad \vec{e}_i = a_i^J \vec{E}_J \quad \vec{E}_I = b_I^j \vec{e}_j \quad \text{avec} \quad a_i^J b_J^k = \delta_i^k$$

Pour un tenseur d'ordre 2, on a :

$$T = t^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^{IJ} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J \quad t^{ij} = b_i^I b_j^J T^{IJ} \quad T^{IJ} = a_i^I a_j^J t^{ij}$$

Pour un tenseur d'ordre 4, on obtient :

$$T = t^{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l = T^{IJKL} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J \otimes \vec{E}_K \otimes \vec{E}_L \quad t^{ijkl} = b_i^I b_j^J b_k^K b_l^L T^{IJKL} \quad T^{IJKL} = a_i^I a_j^J a_k^K a_l^L t^{ijkl}$$

Remarque La notation précédente (avec des indices supérieurs et inférieurs) peut choquer à première vue mais cette notation est en conformité avec les notions de variance et de contravariance. Elle permet des écritures avec des simplifications systématiques. De plus, dans le cas d'une métrique non euclidienne, elle seule permettra de prendre en compte correctement les nouvelles notions de longueur.

Toutefois, dans un souci de simplicité, nous continuerons à utiliser des notations avec des indices inférieurs pour les tenseurs.

5-3 Matériau isotrope

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. On peut alors démontrer que la seule forme possible de ce tenseur est :

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

On obtient ainsi la loi de comportement faisant apparaître les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Avec cette forme de relation, on constate que les directions principales de contraintes sont confondues avec les directions principales de déformations.

Cette loi de comportement ayant déjà été étudiée, nous nous proposons de regarder de plus près des comportements de matériaux présentant un certain degré d'anisotropie.

5-4 Matériau orthotrope

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Un milieu est dit *orthotrope* pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois (dans certains cas), les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés.

Supposons que nous ayons une symétrie par rapport au plan de coordonnées $x_3=0$. La matrice de changement de base traduisant cette symétrie est :

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation d'indépendance du tenseur de raideur \bar{K} dans ce changement va se traduire par le fait que toutes les composantes K_{ijk} ayant un nombre impair d'indice 3 sont nulles. Ainsi pour la matrice C on obtient :

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{64} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{65} = 0$$

Le tenseur de raideur n'a plus que 13 coefficients indépendants.

Il nous reste maintenant à traduire la condition de symétrie par rapport à un plan orthogonal, par exemple celui de coordonnées $x_1=0$. On aura donc :

$$(c_{15}) = c_{16} = (c_{25}) = c_{26} = (c_{35}) = c_{36} = c_{45} = (c_{46}) = 0$$

Il ne reste donc que 9 coefficients indépendants pour traduire le comportement de notre matériau. Dans le repère principal d'orthotrope, la loi peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Les conditions de symétrie se traduisant par les relations

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Le matériau est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

- * 3 modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2 et E_3 dans les directions de l'orthotropie.
- * 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23} et G_{31} .
- * 3 coefficients de contraction ν_{12}, ν_{23} et ν_{31} .

De plus, des considérations thermodynamiques sur le travail de déformation permettent de démontrer les inégalités suivantes :

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} > 0 \quad ; \quad 1 - \nu_{23} \nu_{32} > 0 \quad ; \quad 1 - \nu_{31} \nu_{13} > 0$$

$$1 - \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} - \nu_{21} \nu_{13} \nu_{32} - \nu_{21} \nu_{12} - \nu_{31} \nu_{31} - \nu_{32} \nu_{23} > 0$$

5-5 Matériau isotrope transverse

Un milieu est dit *isotrope transverse* pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Nous pouvons donc remarquer que le milieu est déjà orthotrope.

Imaginons par exemple que l'axe \vec{E}_3 soit l'axe d'isotropie. Il est donc nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par :

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conçoit facilement qu'en plus des relations du cas orthotrope, on obtienne de nouvelles relations entre les coefficients élastiques du tenseur de raideur. On aura par exemple :

$$K_{1212} = -\sin \alpha \cos \alpha A_{1p} A_{2q} K_{11pq} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) A_{1p} A_{2q} K_{12pq} + \sin \alpha \cos \alpha A_{1p} A_{2q} K_{22pq}$$

$$K_{1212} = -\sin \alpha \cos \alpha (-\sin \alpha \cos \alpha K_{1111} + \sin \alpha \cos \alpha K_{1122}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 K_{1212} + \sin \alpha \cos \alpha (-\sin \alpha \cos \alpha K_{2211} + \sin \alpha \cos \alpha K_{2222})$$

Ce qui nous donnera :

$$c_{66} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 c_{66}$$

$$4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha c_{66} = 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (c_{11} - c_{12}) \quad \text{car } c_{22} = c_{11}$$

D'où la relation :
$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

En définitive on retrouvera 4 nouvelles équations (dont $c_{22} = c_{11}$). Il n'y a donc plus que 5 composantes indépendantes. Les équations deviennent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Les 4 relations supplémentaires étant : $E_1 = E_2$; $\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$; $G_{13} = G_{23}$; $2G_{12} = \frac{E_1}{1 + \nu_{12}}$

6- UTILISATION DES MATERIAUX ANISOTROPES

L'emploi de matériaux anisotrope a tendance à se généraliser. Les méthodes de calcul évoluent rapidement et l'aspect numérique n'est plus une barrière. Toutefois, pour utiliser correctement ces matériaux, il subsiste encore deux difficultés.

La première difficulté est liée à la détermination des constantes élastiques. Certes on conçoit bien que le nombre de paramètres à déterminer étant plus élevé que dans le cas d'un matériau isotrope, il soit nécessaire de faire plus d'expériences de caractérisation. Mais le nombre d'expérience n'est rien vis à vis du mode opératoire. Il ne faut pas perdre de vue que le matériau possède des directions particulières et que les éprouvettes seront à référencées vis à vis de ces directions. Par exemple, dans le cas d'un matériau orthotrope, un essai de traction suivant les trois directions d'orthotropie permettra de déduire les trois modules d'élasticité longitudinal. Mais quel serait le résultat d'un essai de traction mené suivant une direction quelconque?

La seconde difficulté réside dans les calculs de dimensionnement et en particulier dans l'emploi d'un critère. Il est en effet évident que les critères utilisés dans le cas d'un matériau isotrope ne seront pas adaptés au cas anisotrope. Il convient donc de définir de nouveaux critères. Pour un calcul de prédimensionnement, on pourra utiliser un critère dit de "Hill" qui est l'analogue du critère de Von-Mises. Toutefois, il convient de bien faire attention au phénomène de ruine mis en oeuvre. Ce n'est pas toujours un dépassement de la limite élastique qui interviendra dans le dimensionnement. On peut par exemple citer le phénomène de délaminage des matériaux stratifiés ou encore les pertes d'adhésion dans les matériaux composites.

PLASTICITE

1- GENERALITES

Nous envisageons d'étudier un comportement de matériau autre que l'élasticité linéaire. Toutefois, afin de simplifier notre propos, nous considérerons que la viscosité est négligeable et que les sollicitations imposées ne créent pas de dommages significatifs (fissurations, développement de micro cavitation, ...).

La non prise en compte des phénomènes de viscosité ne signifie pas nécessairement que les températures soient basses. En effet, bien que l'élévation de la température soit un facteur favorisant pour la viscosité, cette dernière peut apparaître même à de faibles températures. En fait il convient mieux d'avoir des chargements infiniment lents, qui permettent d'avoir des réponses asymptotiques stabilisées, mais suffisamment rapides pour que le phénomène de viscosité ne puisse pas apparaître.

En ce qui concerne la notion de dommages significatifs elle est tout à fait relative. En effet, il ne faut pas oublier que la plasticité traduit une irréversibilité thermodynamique du processus de charge. Du point de vue microscopique cette irréversibilité a essentiellement pour origine la coalescence de défauts voisins. Ce phénomène irréversible est bien entendu un dommage local. Toutefois, on peut considérer que, les dommages engendrés n'étant pas facilement observables, il n'existe pas de dommages significatifs.

Dans la suite, nous allons considérer que le comportement général élastoviscoplastique d'un matériau est essentiellement élastoplastique. De plus, afin de ne pas compliquer inutilement l'étude, l'élasticité sera considérée comme linéaire. Ainsi on pourra sans ambiguïté attribuer à la plasticité tout aspect non linéaire des comportements étudiés.

2- RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

2-1 Rappels sur l'état de contrainte

L'état de contrainte dans un domaine matériel est un état tensoriel. Dans une étude complète on constate qu'il existe plusieurs possibilités de représentation de cet état tensoriel. Les différences de représentation sont liées soit à une détermination particulière de l'état de contrainte (Tenseur de CAUCHY, tenseur de PIOLAT-KIRCHOFF 1 ou de BOUSSINEQ, tenseur de PIOLAT-KIRCHOFF 2 ou de PIOLAT-LAGRANGE, tenseur de KIRCHOFF) soit à une théorie plus ou moins simplificatrice.

Dès lors que l'on étudie les possibilité de grandes déformations et de grands déplacements, il convient de bien dissocier toutes ces représentations. Toutefois, toujours dans le but de ne pas alourdir l'exposé, nous nous contenterons d'utiliser le tenseur contrainte défini dans le cours de Mécanique des Milieux Continus. Ce dernier représente la convergence des différents tenseurs pour des états de déformations et de déplacements faibles (hypothèse des petites perturbations).

Quelle que soit la représentation tensorielle choisie pour l'état de contrainte, on peut associer une base principale et définir un état déviatorique associé.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

2-1-1 Base principale - Invariants

Dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$, le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$$

Il existe un système d'axes particulier qui représente les "directions propres" de la matrice. Ce repère est appelé le repère principal des contraintes $(\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$. Dans cette base la matrice représentant l'état de contrainte prend une forme diagonale :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$$

La détermination des contraintes principales passe par la diagonalisation de la matrice des contraintes. On doit ainsi rechercher les solutions de l'équation :

$$\det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{I}) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Quelque soit le système de référence $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ choisit, on doit trouver les mêmes valeurs de contraintes principales. En conséquence les quantités I_1, I_2 et I_3 ne doivent pas dépendre du système d'axes. Ce sont les invariants du tenseur des contraintes :

$$I_1 = \begin{cases} \text{trace du tenseur des contraintes} \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} -(\text{somme des cofacteurs des termes de la diagonale}) \\ -(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = -\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}^2) \\ -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I) \end{cases}$$

$$I_3 = \begin{cases} \text{déterminant de la matrice des contraintes} \\ \det(\sigma_{ij}) \\ \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

2-1-2 Tenseur déviateur des contraintes

Il est toujours possible de mettre le tenseur des contraintes sous la forme d'une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle :

$$\sigma = \sigma_m \bar{I} + s \quad \begin{cases} \text{tr}(s) = 0 \\ \sigma_m = \frac{I_1}{3} \end{cases}$$

$\sigma_m \bar{I}$ est le tenseur hydrostatique.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}'$ est le tenseur déviateur des contraintes.

On a bien évidemment :

$$\underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_1 = \text{tr}(\underline{\underline{s}}) = 0$$

Pour décrire un comportement plastique, on utilise souvent le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes:

$$J_2 = -\frac{1}{2}(s_{ii} s_{kk} - s_{ik}^2) = \frac{1}{2} s_{ik} s_{ik}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)$$

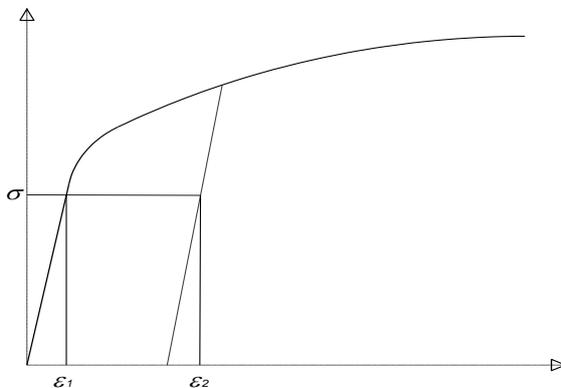
$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]$$

On définit la contrainte octaédrale par la relation :

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

On a donc la relation : $J_2 = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2$

2-2 Rappels sur l'état de déformation



Le processus de plastification fait souvent intervenir le paramètre temps. On peut arriver à un état de contraintes donné en suivant plusieurs chemins de chargement. L'état de déformation obtenu n'est alors pas le même. L'histoire du chargement joue un rôle important.

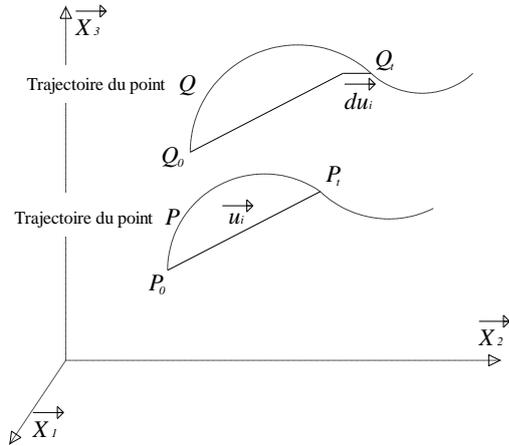
Ainsi, contrairement à un comportement élastique linéaire, il convient donc de faire intervenir un paramètre associé à la notion de temps dans la description d'un comportement plastique.

2-2-1 Cas des petites déformations

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Le domaine est décrit à l'état de référence par les coordonnées a_i à l'instant $t=0$:



$$\vec{OP}_0 = a_i \vec{X}_i$$

L'état actuel est caractérisé par les variables de position x_i à l'instant t :

$$\vec{OP}_t = x_i \vec{X}_i$$

Le déplacement est alors donné par le champ vectoriel

$$\vec{U}(P_0) = \vec{P}_0 P_t$$

Au voisinage du point P_t , on peut écrire :

$$\vec{P}_0 Q_0 = da_i \vec{X}_i$$

$$\vec{U}(Q_0) = \vec{Q}_0 Q_t = \vec{U}(a_i + da_i) = \vec{U}(P_0) + d\vec{U}$$

$$d\vec{U} = du_i \vec{X}_i$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} da_j$$

Ce qui nous donne :

$$d\vec{U} = \text{grad}(\vec{U}) P_0 Q_0$$

Relation que l'on peut encore écrire :

$$d\vec{U} = r P_0 Q_0 + \varepsilon P_0 Q_0$$

Avec :

$$2\varepsilon = \text{grad}(\vec{U}) + \text{grad}(\vec{U})^T$$

$$2r = \text{grad}(\vec{U}) - \text{grad}(\vec{U})^T$$

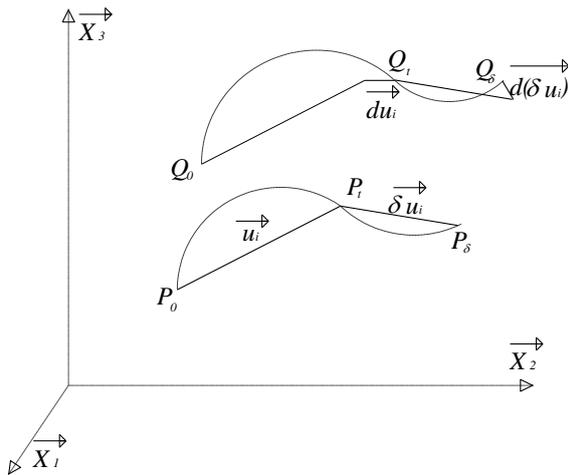
Dans le cas d'un repère cartésien, on obtient :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$$

$$r_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$$

2-2-2 Cas des grandes déformations

Il convient dans ce cas de distinguer l'état actuel de l'état de référence.



Par rapport à l'état actuel, on envisage un accroissement δ t de la variable temps. On obtient ainsi une différentielle temporelle des fonctions qui caractérisent l'état thermodynamique de notre système d'étude. Le point P_t devient un point P_δ . Entre ces deux points, nous pouvons définir le vecteur déplacement instantané :

$$\vec{\delta U} = \vec{P_t P_\delta}$$

On définit alors le tenseur des déformations actuelles :

$$(\delta \varepsilon)_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i} \right]$$

Cette fois les dérivations sont faites à partir des coordonnées actuelles.

Interprétation physique des termes

A l'instant t , on considère un petit élément de longueur l qui est parallèle à la direction \vec{X}_1 (l'élément originel l_0 n'ayant a priori aucune relation avec la direction \vec{X}_1). A l'instant $t + \delta t$, la longueur de l'élément est devenue $l + \delta l$. On a alors :

$$(\delta \varepsilon)_{11} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\delta l}{l}$$

$(\delta \varepsilon)_{12}$ représente la demi-distorsion de l'angle droit (\vec{X}_1, \vec{X}_2) à l'instant t .

Remarque: on peut être amené à définir un tenseur des vitesses de déformations actuelles :

$$(\dot{\delta \varepsilon})_{ik} = \frac{(\delta \varepsilon)_{ik}}{\delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] = \dot{\varepsilon}_{ik}$$

2-2-3 Déviateur du tenseur des déformations actuelles

De même que pour le tenseur des contraintes, il est possible d'envisager une décomposition du tenseur des déformations actuelles en une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\overline{\delta \varepsilon} = (\delta \varepsilon)_m I + \delta \varepsilon'$$

La partie sphérique caractérise le changement de volume sans changement de forme, alors que la partie déviatorique caractérise le changement de forme sans changement de volume.

On peut bien entendu associer trois invariants au déviateur du tenseur des déformations actuelles.

2-3 Relations entre contraintes et déformations

Ces relations traduisent la loi de comportement du matériau employé. Comme il n'existe pas une relation universelle, chacune des expressions données est déterminée dans un domaine d'emploi bien défini. Ce domaine peut être défini par de nombreux paramètres (temps, contraintes, température ...).

La première relation étudiée dans un cours de mécanique des milieux continus est la relation de l'élasticité linéaire, encore appelée "loi de Hooke". Cette relation représente une proportionnalité entre l'état de contrainte et l'état de déformation. Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, on a :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} 3\sigma_m I$$

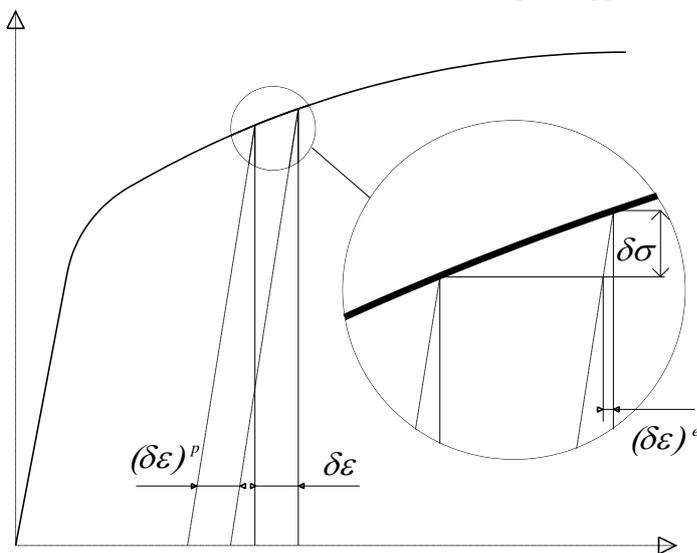
Cette relation n'est valable que pour un état de sollicitation faible. Des critères (Von Misès, Tresca, Mohr Caquot ...) permettent de vérifier la légitimité de l'emploi de cette formule.

Dans le cas de non vérification du critère, il convient d'utiliser une autre loi de comportement.

3- CRITERES DE PLASTICITE

3-1 Position du problème

Les résultats d'un essai de traction montrent que le dépassement de la limite élastique fait apparaître des déformations permanentes, c'est à dire des déformations résiduelles après suppression des charges.



Expérimentalement, on constate souvent que la courbe de décharge est une droite parallèle à la droite correspondante au domaine élastique. On peut ainsi affirmer que la déformation effective est la somme d'une déformation élastique et d'une déformation purement plastique.

$$\delta\varepsilon = (\delta\varepsilon)^e + (\delta\varepsilon)^p$$

Plus généralement, on écrira :

$$(\delta\varepsilon)_{ik} = (\delta\varepsilon)_{ik}^e + (\delta\varepsilon)_{ik}^p$$

Avec pour la déformation élastique:

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^e = \frac{1+\nu}{E} \delta\sigma_{ik} - \frac{\nu}{E} 3\delta\sigma_m \delta_{ik}$$

En définitive, il reste à évaluer la déformation plastique $(\delta\varepsilon)_{ik}^p$.

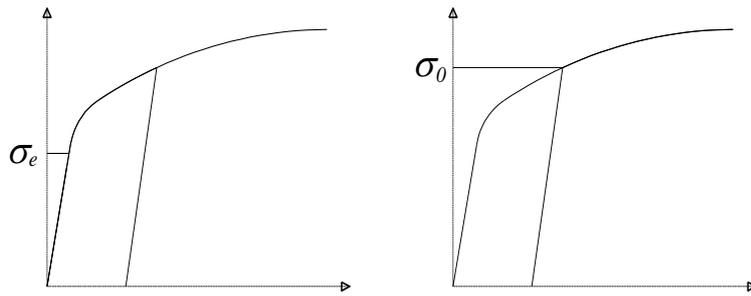
3-2 Surfaces et fonctions de charge

On appelle surface de charge, la surface qui, à l'instant t va délimiter le domaine élastique dans l'espace des contraintes.

Il est à noter que la notion de surface doit être prise au sens large puisque l'espace des contraintes est un espace vectoriel de dimension 6 (vu la symétrie du tenseur des contraintes). Ainsi la surface de charge aura une dimension 5. Bien entendu cette notion d'espace vectoriel de dimension supérieure à 2 ne va pas faciliter la représentation géométrique.

Dans l'espace des contraintes, un état de contrainte est représenté par un point $P(\sigma_{ik})$. L'origine du référentiel est associé à l'état de contrainte nul $(\sigma=0)$.

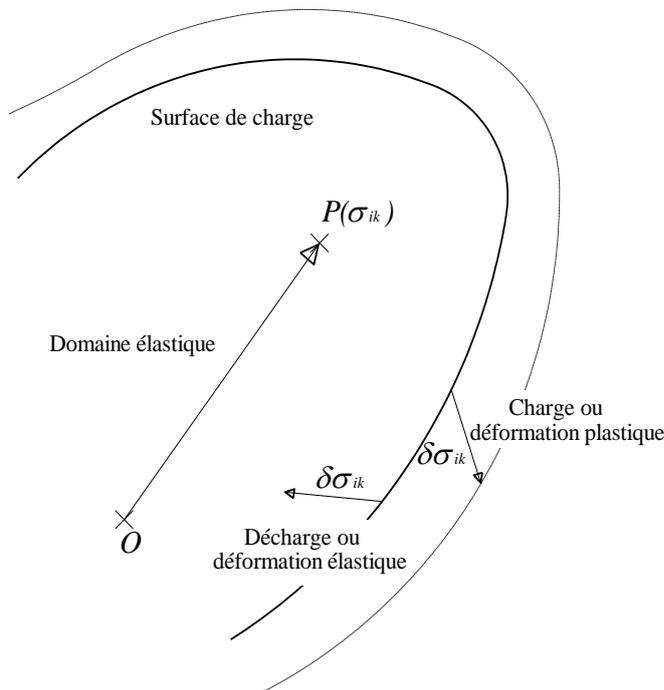
L'ensemble des points tel que le comportement soit encore élastique est délimité par une surface qui est la surface de charge. La relation permettant de décrire cette surface est la fonction de charge.



L'essai de traction d'un matériau fait clairement apparaître la notion d'écrouissage. La limite élastique enregistrée lors de l'essai est fonction des chargements antérieurs. En particulier, on constate que cette limite est la plus grande valeur de contrainte créée lors des essais antérieurs si ceux-ci ont dépassé la limite élastique existante. C'est le phénomène d'écrouissage.

La surface de charge est donc évolutive. L'équation d'une telle surface est de la forme :

$$f(\sigma_{ik}, \xi) \quad \text{où } \xi \text{ est un paramètre d'écrouissage}$$



A partir de la surface de charge, une augmentation de l'état de contrainte (charge) déplacera la surface, alors qu'une diminution de l'état de contrainte (décharge) donnera un point à l'intérieur de la surface.

On dit qu'il y a un écrouissage isotrope si la dilatation de la surface de charge est uniforme dans toutes les directions. Dans le cas contraire, l'écrouissage est dit cinématique.

Cette notion de surface de charge permet de définir des états de contraintes et de déformations équivalents.

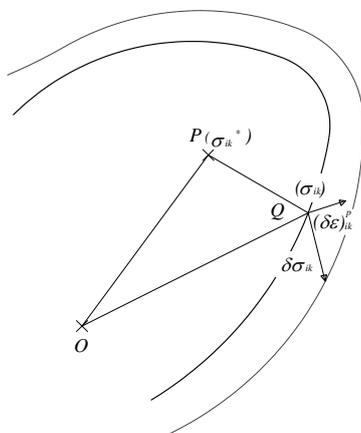
La contrainte équivalente à un état de contraintes plastiques quelconques est la contrainte de traction qui se trouve sur la surface de charge.

La déformation actuelle plastique équivalente est la déformation qui, associée à la contrainte équivalente, donne un travail plastique égal au travail plastique réel :

$$\delta W^p = \sigma_{ik} \cdot (\delta \epsilon)_{ik}^p = \sigma_{\text{equi}} \cdot (\delta \epsilon)_{\text{equi}}^p$$

La notion de fonction de charge conduit naturellement aux critères de plasticité.

3-3 Principe de Hill



Le principe de Hill, appelé encore principe du travail plastique maximal, dit que l'état de contrainte réel est, parmi l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissible, celui pour lequel le travail plastique est maximal.

Soit σ_{ik} un état de contrainte sur la surface de charge (point Q) et soit $\delta \sigma_{ik}$ un accroissement de contrainte qui crée une déformation plastique $(\delta \epsilon)_{ik}^p$.

Le principe de Hill permet alors d'affirmer que pour tout état de contrainte élastique σ_{ik}^* (point P), le travail plastique associé est inférieur au travail plastique associé à l'état de contrainte σ_{ik} .

$$\sigma_{ik} \cdot (\delta \epsilon)_{ik}^p \geq \sigma_{ik}^* \cdot (\delta \epsilon)_{ik}^p$$

On a donc :

Michel MAYA

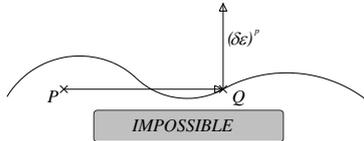
Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^P - \sigma_{ik}^* \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^P \geq 0$$

$$(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*) (\delta\varepsilon)_{ik}^P \geq 0$$

Or, dans l'espace des contraintes, $(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*)$ représente les composantes du vecteur \vec{PQ} .

On a donc la relation :



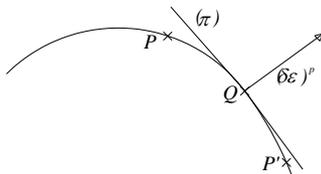
$$\vec{PQ} \cdot \left(\vec{\delta\varepsilon} \right)^P \geq 0$$

Cette inégalité conduit à la convexité de la surface de charge.

D'autre part, on en déduit une condition importante sur la déformation plastique. Considérons en effet le cas où l'on tend vers le point Q (situé sur la surface de charge) par deux directions opposées. On désigne par (π) le plan tangent en Q à la surface de charge. Les points P et P' étant infiniment proches du point Q , on peut associer des composantes infiniment petites aux vecteurs :

$$\vec{PQ} \Rightarrow d\sigma_{ik} \quad \text{et} \quad \vec{P'Q} \Rightarrow d\sigma'_{ik}$$

Ces deux vecteurs appartiennent bien entendu au plan tangent (π) . D'autre part si on considère que le point P' est le point symétrique de P par rapport au point Q , on a :



$$d\sigma'_{ik} = -d\sigma_{ik}$$

D'après le principe de Hill, on donc :

$$\pm d\sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^P \geq 0$$

Soit :

$$d\sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^P = 0$$

Cette relation devant être vraie quelque soit le point P appartenant au plan tangent (π) , on en déduit que le vecteur de composante $(\delta\varepsilon)_{ik}$ est perpendiculaire à (π) en Q et est dirigé vers l'extérieur. C'est la loi de normalité de la déformation plastique.

A partir de la fonction de charge, on a donc :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} \delta\lambda$$

Dans cette expression, $\delta\lambda$ est un coefficient de proportionnalité qui dépend de σ_{ik} , ξ et de $d\sigma_{ik}$.

3-4 Critère de Von-Misès

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il y a une relation évidente entre la fonction de charge et le critère de limite d'élasticité. Examinons plus précisément le cas du critère de Von-Misès.

Le critère de Von-Misès revient en fait à limiter la contrainte octaédrique, c'est à dire J_2 le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes.

$$J_2 = -\frac{1}{2} (s_{ii} s_{kk} - s_{ik}^2) = \frac{1}{2} s_{ik} s_{ik} = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]$$

Pour tenir compte du phénomène d'écroutissement, nous écrivons :

$$f(\sigma_{ik}, \xi) = J_2 - 2\sigma_0^2 = J_2 - \xi^2$$

Dans cette expression, σ_0 représente la contrainte limite élastique équivalente (associée à l'essai de traction).

L'utilisation de la loi de la normalité nous conduit au calcul suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \frac{\partial s_{jl}}{\partial \sigma_{ik}}$$

Avec, pour les composantes du tenseur déviateur des contraintes :

$$s_{jl} = \sigma_{jl} - \sigma_m \delta_{jl} = \sigma_{jl} - \frac{1}{3} \sigma_{op} \delta_{op} \delta_{jl}$$

D'où :

$$\frac{\partial s_{jl}}{\partial \sigma_{ik}} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{io} \delta_{kp} \delta_{op} \delta_{jl} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Mais nous avons les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \delta_{ij} \delta_{kl} = \frac{\partial f}{\partial s_{ik}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = \delta_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial s_{jl}} \delta_{jl} \right) = \delta_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial s_{11}} + \frac{\partial f}{\partial s_{22}} + \frac{\partial f}{\partial s_{33}} \right) = \delta_{ik} (s_{11} + s_{22} + s_{33}) = 0$$

D'où le résultat :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ik}} = s_{ik}$$

On en déduit donc pour la loi de comportement en plasticité :

$$(\delta \varepsilon)_{ik}^p = s_{ik} \delta \lambda$$

3-4-1 Incompressibilité plastique

La formule précédente nous permet de calculer la dilatation volumique plastique :

$$(\delta \theta)^p = (\delta \varepsilon)_{ik}^p \delta_{ik} = s_{ik} \delta \lambda \delta_{ik} = J_1 \delta \lambda = 0$$

Ainsi la déformation plastique pure est un déviateur. En pratique on constate effectivement que l'équivalent du coefficient de Poisson a une valeur de 0,5 pour un comportement plastique.

3-4-2 Contrainte équivalente

L'état de contrainte équivalent étant un état de traction, le tenseur des contraintes associé est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{équi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la fonction de charge, on peut calculer la contrainte équivalente :

$$f(\sigma_{ik}, \xi) = J_2 - \xi^2 = \frac{1}{6} 2 \sigma_{\text{équi}}^2 - \xi^2$$

$$\sigma_{\text{équi}}^2 = 3 J_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right]$$

3-4-3 Expression du coefficient de proportionnalité

On rappelle que le coefficient de proportionnalité est donné par la relation :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} \delta\lambda$$

Sachant que d'autre part on a :

$$\delta W^p = \sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^p = \sigma_{\text{équi}} \cdot (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p$$

On peut en déduire :

$$\delta\lambda = \frac{\sigma_{\text{équi}} \cdot (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p}{\sigma_{ik} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}}$$

Mais de plus, dans le cas du critère de Von-Mises, on peut écrire :

$$\sigma_{ik} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \sigma_{ik} s_{ik} = (s_{ik} + \sigma_m \delta_{ik}) s_{ik} = s_{ik} s_{ik} + \sigma_m \delta_{ik} s_{ik}$$

Avec le tenseur déviateur, nous avons :

$$\delta_{ik} s_{ik} = J_1 = 0$$

On obtient :

$$\sigma_{ik} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = s_{ik} s_{ik} = 2J_2 = \frac{2}{3} \sigma_{\text{équi}}^2$$

Ce qui nous permet d'explicitier le coefficient de proportionnalité :

$$\delta\lambda = \frac{3 (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p}{2 \sigma_{\text{équi}}}$$

3-4-4 Déformation actuelle plastique équivalente

Les expressions précédentes nous permettent d'écrire :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p = s_{ik} \delta\lambda = s_{ik} \frac{3 (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p}{2 \sigma_{\text{équi}}}$$

Ce qui nous donne :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p (\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{9}{4} \left(\frac{(\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p}{\sigma_{\text{équi}}} \right)^2 s_{ik} s_{ik} = \frac{3}{2} \left((\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p \right)^2$$

On obtient donc :

$$\left((\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p \right)^2 = \frac{2}{3} (\delta\varepsilon)_{ik}^p (\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{4}{3} J_2'$$

A partir de cette formulation incrémentale, on peut alors donner l'expression de la déformation actuelle plastique équivalente ou cumulée :

$$\varepsilon_{\text{équi}}^p = \int_{t=0}^t (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p$$

4- RELATIONS DE HENCKY-MISES

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

L'étude précédente nous a montré que l'on pouvait relier l'état de déformation plastique à un état équivalent en traction. Il nous reste maintenant à exploiter les résultats de l'essai de traction pour en déduire une loi de comportement plastique.

4-1 Hypothèse d'écroutissage

L'équation de la surface de charge est donc :

$$f(\sigma_{ik}, \xi) = J_2 - 2\sigma_0^2 = J_2 - \xi^2 = 0$$

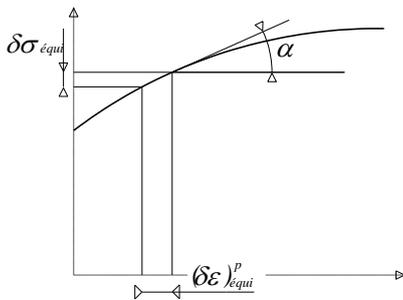
Comme nous avons pu le constater, le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes J_2 est une fonction de la contrainte équivalente $\sigma_{\text{équi}}$.

D'autre part, on formule l'hypothèse que le paramètre d'écroutissage ξ dépend de la déformation plastique équivalente $\varepsilon_{\text{équi}}^p$.

On peut donc dire que la surface de charge induit des relations entre la contrainte équivalente et la déformation plastique équivalente.

$$\varepsilon_{\text{équi}}^p = h(\sigma_{\text{équi}}) \quad \sigma_{\text{équi}} = h^{-1}(\varepsilon_{\text{équi}}^p)$$

Ces relations nous permettent de tracer la courbe d'écroutissage :



Cette courbe fait en particulier apparaître le module tangent plastique E_t^p qui est l'équivalent local dans le domaine plastique du module d'Young.

Dans le cas de l'essai de traction, on a :

$$\sigma_I = \sigma = \sigma_{\text{équi}} = \frac{F}{S} \neq \frac{F}{S_0} \quad \sigma_{II} = 0 \quad \sigma_{III} = 0$$

Les déformations plastiques engendrées sont :

$$(\delta\varepsilon)_I^p = \frac{\delta l^p}{l} \quad (\delta\varepsilon)_{II}^p = (\delta\varepsilon)_{III}^p = -\frac{1}{2} \frac{\delta l^p}{l} \quad (\text{incompressibilité plastique})$$

La déformation actuelle équivalente plastique est :

$$((\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p)^2 = \frac{2}{9} \left[\left(\frac{3}{2} (\delta\varepsilon)_I^p \right)^2 + 2 \right] = ((\delta\varepsilon)_I^p)^2$$

$$(\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p = \frac{\delta l^p}{l}$$

4-2 Relations de PRANDTL - REUSS

On a donc :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{3}{2} s_{ik} \frac{(\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p}{\sigma_{\text{équi}}}$$

De plus l'hypothèse d'écroutissage nous donne :

$$\varepsilon_{\text{équi}}^p = h(\sigma_{\text{équi}})$$

On en déduit :

$$(\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p = h'(\sigma_{\text{équi}}) \delta\sigma_{\text{équi}} = \frac{\delta\sigma_{\text{équi}}}{E_t^p}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{3}{2} s_{ik} \frac{\delta\sigma_{\text{équi}}}{E_t^p \sigma_{\text{équi}}}$$

Pour avoir la loi de comportement, il faut rajouter la partie élastique :

$$(\delta\varepsilon)_{ik} = \frac{3}{2} s_{ik} \frac{\delta\sigma_{\text{équi}}}{E_t^p \sigma_{\text{équi}}} + \frac{1+\nu}{E} \delta\sigma_{ik} - \frac{\nu}{E} 3\delta\sigma_m \delta_{ik}$$

Cette loi de comportement du domaine élastoplastique porte le nom de loi de PRANDTL-REUSS.

4-3 Relations de HENCKY - MISES

La loi précédente est une loi incrémentale. Pour définir l'état de déformation final, on est obligé de connaître le trajet de chargement suivi.

L'hypothèse la plus simple correspond à un chargement radial, c'est à dire un chargement proportionnel à un seul paramètre :

$$\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_{\text{équi}}} = cte = \eta \quad \forall i, k$$

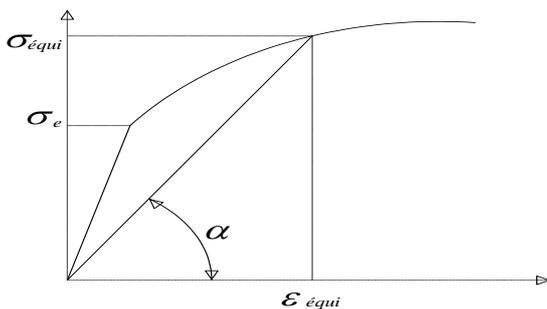
On peut alors intégrer les incréments de déplacement. Par exemple, pour le calcul de la déformation linéaire dans la direction \vec{X}_1 on a :

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{11} = \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \right) \frac{h(\sigma_{\text{équi}})}{\sigma_{\text{équi}}} + \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$$

Pour la distortion angulaire :

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{12} = \frac{3}{2} \sigma_{12} \frac{h(\sigma_{\text{équi}})}{\sigma_{\text{équi}}} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$$

A partir de ces formules, on peut définir le graphique suivant :



On peut en déduire la relation :

$$\frac{1}{E_s} = \frac{h(\sigma_{\text{équi}})}{\sigma_{\text{équi}}} + \frac{1}{E}$$

Cette relation nous conduit alors aux formules de Hencky - Misés

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_S} \left(1 + \frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) - \left(\frac{h(\sigma_{\text{equi}})}{2\sigma_{\text{equi}}} + \frac{\nu}{E} \right) I_1 \delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{11} = \frac{1}{E_S} \left[\sigma_{11} - \left(\frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] \\ \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{22} = \frac{1}{E_S} \left[\sigma_{22} - \left(\frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \right] \\ \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{33} = \frac{1}{E_S} \left[\sigma_{33} - \left(\frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) (\sigma_{33} + \sigma_{22}) \right] \\ \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{23} = \frac{\sigma_{23}}{E_S} \left(1 + \frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) \\ \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{31} = \frac{\sigma_{31}}{E_S} \left(1 + \frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) \\ \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E_S} \left(1 + \frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) \end{array} \right.$$

5- EXEMPLES

5-1 Exemple dans le cas d'un essai de traction

Le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma = \frac{F}{S}$$

Les formules précédentes nous montrent que les directions principales restent fixes. De plus nous avons :

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{11} = \frac{\sigma}{E_S}$$

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{22} = -\frac{\sigma}{E_S} \left(\frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}}} \right) = \int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{33}$$

On peut alors définir un coefficient de Poisson rationnel :

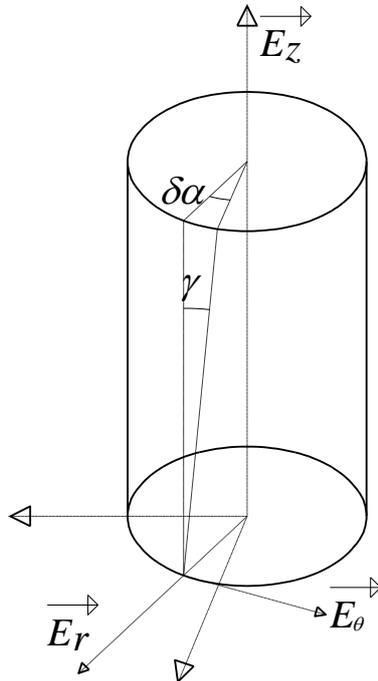
$$\bar{\nu} = -\frac{\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{22}}{\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{11}} = -\frac{h(\sigma_{\text{equi}})E_S + \nu E_S}{2\sigma_{\text{equi}} E}$$

Ce qui nous donne dans un système d'axe quelconque :

$$\int_{t_0}^t (\delta\varepsilon)_{ij} = \frac{1+\bar{\nu}}{E_S} \sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{E_S} I_1 \delta_{ij}$$

Ces formules rappellent les formules d'élasticité linéaire.

5-2 Traction et torsion d'un tube mince



On considère un tube d'épaisseur e_0 et de longueur l_0 en dimensions initiales ($e_0 \ll l_0$). Ce tube étant soumis à une sollicitation combinée de traction et torsion, les dimensions sont e et l à un instant donné. L'état de contrainte est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

Pour les déformations actuelles on a :

$$\overline{(\delta \varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta e}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta r}{r} & \frac{r \delta \alpha}{2l} \\ 0 & \frac{r \delta \alpha}{2l} & \frac{\delta l}{l} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

Au cours de l'expérience, on mesure la longueur l et l'angle α .

Les relations de Prandtl et Reuss nous donnent :

$$(\delta \varepsilon)_z = \frac{\delta l}{l} = \sigma \frac{h'(\sigma_{\text{équi}}) \delta \sigma_{\text{équi}}}{\sigma_{\text{équi}}} + \frac{\delta \sigma}{E}$$

$$(\delta \varepsilon)_{\alpha z} = \frac{r \delta \alpha}{2l} = \frac{3}{2} \tau \frac{h'(\sigma_{\text{équi}}) \delta \sigma_{\text{équi}}}{\sigma_{\text{équi}}} + \frac{\delta \tau (1+\nu)}{E}$$

Très souvent on prend la fonction h sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{\text{équi}}^p = A [(\sigma_{\text{équi}})^m - (\sigma_e)^m] = h(\sigma_{\text{équi}})$$

Dans cette formule, les coefficients A et m sont des constantes déterminées expérimentalement.

On obtient :

$$h'(\sigma_{\text{équi}}) = Am(\sigma_{\text{équi}})^{m-1}$$

D'où les équations :

$$\begin{cases} \frac{\delta l}{l} = \sigma Am(\sigma_{\text{équi}})^{m-2} \delta \sigma_{\text{équi}} + \frac{\delta \sigma}{E} \\ \frac{r \delta \alpha}{2l} = \frac{3}{2} \tau Am(\sigma_{\text{équi}})^{m-2} \delta \sigma_{\text{équi}} + \frac{\delta \tau (1+\nu)}{E} \end{cases}$$

Pour intégrer ces relations, nous allons considérer un chargement en deux étapes.

Première étape : Traction seule

Les équations nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{\delta l}{l} = Am(\sigma)^{m-1} \delta\sigma + \frac{\delta\sigma}{E} \\ \delta\alpha = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{\delta l}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} = A(\sigma)^m + \frac{\sigma}{E} + cte = A[(\sigma)^m - (\sigma_e)^m] + \frac{\sigma}{E}$$

Deuxième étape : Traction constante et torsion

La contrainte équivalente est alors :

$$\sigma_{\text{équi}} = \sqrt{\frac{1}{2}(2\sigma^2 + 6\tau^2)} = \sigma \sqrt{1 + \frac{3\tau^2}{\sigma^2}}$$

Pour pouvoir intégrer, on effectue le changement de variable :

$$u = \sqrt{3} \frac{\tau}{\sigma}$$

D'où :

$$\delta\sigma_{\text{équi}} = \sigma \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2}}$$

On a alors :

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{mA\sigma^m}{2} (1+u^2)^{\frac{m-3}{2}} d(1+u^2)$$

Ainsi, le couple de torsion contribue à un allongement axial non nul. On obtient :

$$\ln \frac{l}{l_1} = \frac{mA\sigma^m}{m-1} \left[(1+u^2)^{\frac{m-1}{2}} - 1 \right]$$

D'autre part, on peut calculer l'angle de torsion :

$$\frac{r\delta\alpha}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sigma)^m mA u (1+u^2)^{\frac{m-3}{2}} d(1+u^2) + \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \frac{\delta u(1+\nu)}{E}$$

En considérant que l'on a :

$$\int_0^\alpha \frac{r\delta\alpha}{2l} \approx \frac{r}{2l} \int_0^\alpha \delta\alpha = \frac{r\alpha}{2l}$$

On obtient :

$$\frac{r\alpha}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2} mA \int_0^u u^2 (1+u^2)^{\frac{m-3}{2}} du + \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \frac{u(1+\nu)}{E}$$

LES ETATS D'APPROXIMATIONS

Les états d'approximations permettent d'obtenir un encadrement numérique de la solution d'un problème mécanique. On joue sur la dualité contrainte - déformation dans la description de l'énergie de déformation.

En fait on démontre que pour un problème posé, la solution est soit celle qui minimise une fonctionnelle d'un sous-espace des tenseurs déformations, soit celle qui maximise une autre fonctionnelle d'un sous-espace des tenseurs contraintes.

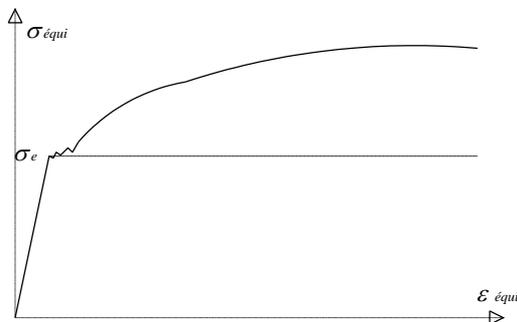
Afin de fixer les idées, nous allons traiter un exemple intégrant une loi de comportement plastique.

1- PLASTICITE PARFAITE

1-1 Matériau élastique parfaitement plastique

Les relations de Hencky-Misés sont relativement générales et elles permettent de traiter de nombreux problèmes. Toutefois, elles sont d'une mise en oeuvre relativement compliquée et elles sont mal adaptées à la recherche d'une solution numérique rapide et approchée.

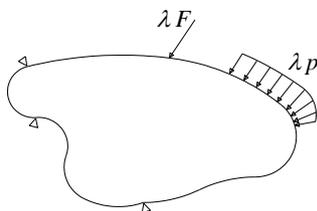
L'inconvénient majeur provient de la complexité de la formulation numérique de la loi de comportement. Lorsque l'on cherche à établir rapidement une solution, il peut être intéressant de changer la modélisation de la loi de comportement. La formulation la plus simple permettant de prendre en compte le phénomène de plasticité est la modélisation du matériau élastique parfaitement plastique.



Expérimentalement on constate que les déformations plastiques engendrées par un accroissement de contrainte sont beaucoup plus élevées que les déformations élastiques. On peut donc considérer que la courbe d'écrouissage est approximativement une droite horizontale (écrouissage nul).

Ce modèle présente d'une part l'avantage d'être sécurisant par rapport à la réalité, d'autre part il traduit relativement bien le cas des matériaux présentant un palier d'écoulement.

Considérons le cas d'une structure hyperstatique à laquelle on impose des forces extérieures croissantes proportionnellement à un facteur de charge unique (cas d'un chargement radial). Cette structure est réalisée avec un matériau élastique parfaitement plastique.



Tant que le chargement est relativement faible, les déformations engendrées restent dans le domaine élastique. Le paramètre de charge est alors inférieur à une valeur limite :

$$\lambda \leq \lambda_e$$

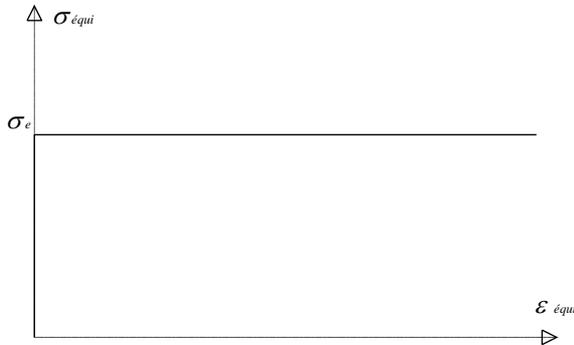
Dès que l'on dépasse cette valeur limite, la plasticité apparaît, mais elle reste contenue par les déformations élastiques. Progressivement des mobilités internes dues à des zones plastifiées vont apparaître. A partir d'une valeur seuil pour le paramètre, le système se transforme en mécanisme :

$$\lambda = \lambda_s$$

On obtient alors le phénomène de ruine.

Si on a un chargement à n paramètres ($\lambda_i, i=1 \dots n$), l'ensemble des chargements seuils forment une surface dans l'espace à n dimensions. C'est la frontière d'écoulement du système.

1-2 Matériau rigide parfaitement plastique



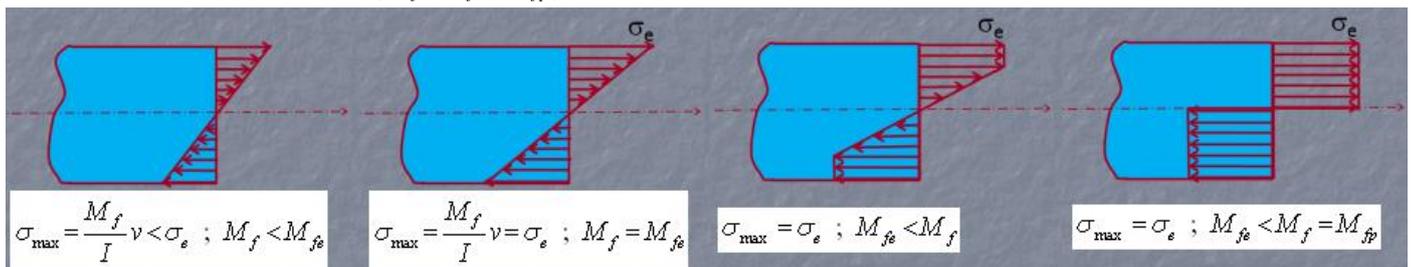
Les déformations élastiques étant très faibles devant les déformations plastiques, on peut très ignorer la phase élastique dans le chargement. Le modèle de loi de comportement devient alors le modèle rigide parfaitement plastique.

Ce modèle est encore plus simple que le précédent car il ne nécessite aucun calcul de type élastique.

1-3 Rotule plastique

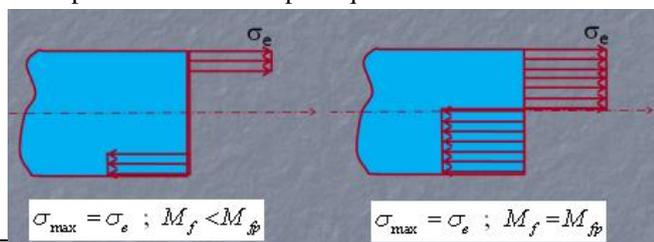
1-3-1 Elastique parfaitement plastique

Considérons le cas d'une poutre droite sollicitée en flexion pure (effort tranchant nul). Dans une section d'abscisse x le moment de flexion est M_f . On peut alors associer un état de contrainte. Si on considère que le chargement est radial, le moment de flexion est proportionnel au paramètre de chargement λ . Pour les valeurs du paramètre faibles, l'état de contrainte est élastique. Lorsque λ augmente, on atteint la contrainte d'écoulement plastique dans les fibres les plus éloignées de l'axe neutre. Le coefficient λ passe progressivement de la valeur λ_e (début de la plasticité) à la valeur λ_s (plasticité de toutes les fibres de la section). C'est l'apparition de la rotule plastique qui est en fait une ruine locale de la poutre. A chacun de ces états on peut associer une valeur du moment de flexion (M_f, M_{fe}, M_{fp}).



1-3-2 Rigide parfaitement plastique

Reprenons l'exemple de la poutre en flexion pure. Si on admet que la loi de comportement est rigide parfaitement plastique, le diagramme représentatif des contraintes dans une section droite est de la forme rectangulaire, la contrainte sur une fibre ne pouvant qu'être nulle ou être à la valeur de la contrainte d'écoulement plastique. Il n'y a donc plus qu'un état limite correspondant à la rotule plastique.



Il est obtenu lorsque toutes les fibres sont sollicitées par une contrainte égale à la contrainte d'écoulement plastique. Il est à noter que la valeur du moment de flexion limite est la même que dans le cas d'un comportement élastique parfaitement plastique. Seules les valeurs des déformations et des déplacements (flèches) seront

différentes. Il est à noter que la distribution des contraintes n'est pas nécessairement symétrique par rapport à l'axe neutre.

2- LES METHODES D'ENCADREMENT

Nous considérons que le matériau a un comportement rigide parfaitement plastique. Donc dans le calcul de l'énergie de déformation, seule la déformation plastique interviendra. Ainsi le principe du travail plastique maximal de Hill nous conduira à l'inégalité :

$$(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*)(\delta\varepsilon)_{ik} = (\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*)(\delta\varepsilon)_{ik}^p \geq 0$$

2-1 Rappels

Un champ de contrainte est dit **statiquement admissible (SA)** pour une structure donnée s'il satisfait aux équations d'équilibre et s'il respecte les conditions aux limites sur les forces.

Un champ de déformation est dit **cinématiquement admissible (CA)** pour une structure donnée s'il dérive d'un champ de déplacement (vérification des équations de compatibilité) et si le champ de déplacement dont il dérive permet de vérifier les conditions aux limites sur les déplacements.

Dans le cas d'un champ de déformations actuelles nous aurons :

$$(\delta\varepsilon)_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i} \right]$$

D'autre part, le théorème des travaux virtuels est le suivant :

Pour tout champ de contrainte statiquement admissible associé à un champ de déformation cinématiquement admissible, le travail des efforts extérieurs est égal au travail de déformation de la structure augmenté du travail des quantités d'accélération galiléennes.

$$\int_s \phi_i \delta u_i ds + \int_v \rho f_i \delta u_i dv = \int_v \sigma_{ij} (\delta\varepsilon)_{ij} dv + \int_v \rho \gamma_i \delta u_i dv$$

$$\int_s \bar{\phi}_i \delta u_i ds + \int_s \bar{\phi}_i \delta u_i ds + \int_v \rho f_i \delta u_i dv = \int_v \sigma_{ij} (\delta\varepsilon)_{ij} dv + \int_v \rho \gamma_i \delta u_i dv$$

Dans la deuxième expression, le travail des forces extérieures surfaciques a été partagé en deux. D'une part on considère le travail des efforts imposés $\bar{\phi}_i$ sur des déplacements inconnus, d'autre part on a le travail des forces inconnues sur des déplacements imposés δu_i (qui sont très souvent nuls).

Remarque : Dans son application, ce théorème présente parfois des inconvénients. On lui préfère alors le théorème des puissances virtuelles dont l'énoncé est le suivant :

Pour tout champ de contrainte statiquement admissible associé à un champ de déformation cinématiquement admissible, la puissance des efforts extérieurs est égale à la puissance de déformation de la structure augmentée de la puissance des quantités d'accélération galiléennes.

$$\int_s \bar{\phi}_i \delta v_i ds + \int_s \bar{\phi}_i \delta v_i ds + \int_v \rho f_i \delta v_i dv = \int_v \sigma_{ij} \left(\dot{\delta\varepsilon} \right)_{ij} dv + \int_v \rho \gamma_i \delta v_i dv$$

2-2 Définitions

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Un champ de contraintes est dit **licite** s'il est statiquement et plastiquement admissible (**SPA**), c'est à dire si en plus d'être **SA** il respecte le critère de plasticité en tous points.

Les chargements créants un champ de contrainte **SPA** sont appelés **chargements licites**. La structure ne peut supporter que ce type de chargement.

Un champ de déformations actuelles est dit **plastiquement admissible** s'il est relié à un champ de contrainte plastiquement admissible par la loi de comportement.

Un champ de déformations actuelles est dit **licite** s'il est cinématiquement et plastiquement admissible (**CPA**).

2-3 Théorème cinématique ou de la borne supérieure

Énoncé

Soit $\overline{\delta\varepsilon^*}$ un champ de déformations actuelles licite, soit $\vec{\delta u}^*$ le champ de déplacement dont il dérive et soit $\overline{\sigma^*}$ un tenseur contrainte lié par la loi d'écoulement.

La fonctionnelle $G(\vec{\delta u}^*) = \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds$ est minimale pour le champ de déplacement $\vec{\delta u}$ solution du problème.

Démonstration

Pour un champ de déformations actuelles licite, le théorème des travaux virtuels nous donne :

$$\int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds + \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds + \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv = \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv$$

En particulier, dans le cas du champ de déformations réelles :

$$\int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds + \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds + \int_V \rho f_i \delta u_i dv = \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij} dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i dv$$

La première équation peut encore s'écrire :

$$\int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds = \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds$$

Compte-tenu du principe du travail plastique maximal, nous pouvons écrire :

$$\int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv \leq \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij} dv$$

Ce qui nous donne :

$$\int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds \leq \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds$$

En utilisant la relation donnée dans le cas du champ de déformations réelle, on obtient :

$$\int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij} dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i dv - \int_V \rho f_i \delta u_i dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i ds \leq \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds$$

Ce qui nous prouve bien que la fonctionnelle $G(\vec{\delta u}^*) = \int_V \overline{\sigma_{ij}^*} (\delta\varepsilon)_{ij}^* dv + \int_V \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_V \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_S \overline{\phi_i} \delta u_i^* ds$

est minimale pour le champ de déplacement $\vec{\delta u}$ solution du problème.

2-4 Théorème statique ou de la borne inférieure

Énoncé

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Soit $\overline{\overline{\sigma^*}}$ un champ de contrainte licite et soient $\overline{\overline{\phi^*}}$ les vecteurs contraintes qui s'en déduisent sur la surface. La fonctionnelle $H(\overline{\overline{\sigma^*}}) = \int_s \overline{\overline{\phi_i^*}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds$ est maximale pour le champ de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ solution du problème.

Démonstration

Pour un champ de contrainte licite quelconque $\overline{\overline{\sigma^*}}$, le théorème des travaux virtuels nous donne :

$$\int_s \overline{\overline{\phi_i}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds + \int_s \overline{\overline{\phi_i^*}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds + \int_v \rho f_i \overline{\overline{\delta u_i}} dv = \int_v \overline{\overline{\sigma_{ij}^*}} (\delta \varepsilon)_{ij} dv + \int_v \rho \gamma_i \overline{\overline{\delta u_i}} dv$$

En particulier pour $\overline{\overline{\sigma}}$ le champ de contrainte solution nous avons :

$$\int_s \overline{\overline{\phi_i}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds + \int_s \overline{\overline{\phi_i^*}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds + \int_v \rho f_i \overline{\overline{\delta u_i}} dv = \int_v \overline{\overline{\sigma_{ij}}} (\delta \varepsilon)_{ij} dv + \int_v \rho \gamma_i \overline{\overline{\delta u_i}} dv$$

Par soustraction, on peut écrire :

$$\int_s (\overline{\overline{\phi_i}} - \overline{\overline{\phi_i^*}}) \overline{\overline{\delta u_i}} ds = \int_v (\overline{\overline{\sigma_{ij}}} - \overline{\overline{\sigma_{ij}^*}}) (\delta \varepsilon)_{ij} dv$$

D'après le principe du travail plastique maximal, cette expression est toujours positive. On en déduit que la fonctionnelle $H(\overline{\overline{\sigma^*}}) = \int_s \overline{\overline{\phi_i^*}} \overline{\overline{\delta u_i}} ds$ est maximale pour le champ de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ solution du problème.

3- APPLICATIONS A LA MISE EN FORME

Lors de la réalisation d'une nouvelle pièce, l'ingénieur a besoin de savoir rapidement si son matériel peut fournir la puissance nécessaire à la mise en forme et si la machine supportera les efforts mis en jeu. En général un ordre de grandeur peut suffire et il est inutile de faire une modélisation numérique fine de type éléments finis. Comme de plus il est possible d'avoir un encadrement de la solution, on peut alors se contenter de méthodes approximatives.

3-1 Méthode des tranches

Cette méthode permet de calculer une valeur approximative des efforts moteurs en prenant en compte le phénomène de frottement au niveau du contact pièce - outil.

3-1-1 Idées générales

On découpe par la pensée le matériau en tranches respectant la symétrie du problème. Ces tranches sont par exemple infiniment minces selon la direction $(O; \vec{E}_x)$.

On formule alors l'hypothèse que la direction \vec{E}_x est une direction principale, les deux autres étant bien entendu perpendiculaires. Les contraintes principales sont constantes dans une tranche d'épaisseur dx . Les forces appliquées à la tranche d'épaisseur dx résultent d'une part des contraintes, d'autre part des efforts de frottement de l'outil à la surface de la tranche. Toutefois la présence de ces forces de frottement ne perturbe pas la répartition des contraintes. On peut choisir un modèle frottement particulier.

Après avoir énoncé ces hypothèses, la suite de la méthode consiste à écrire les équations d'équilibre d'une tranche. L'application d'un critère de plasticité permet d'établir une relation entre les contraintes principales. Une deuxième relation est obtenue à partir de l'application de la loi d'écoulement.

L'intégration de l'équation différentielle générée donne une contrainte principale en utilisant les conditions aux limites. Ensuite, un petit calcul numérique permet d'avoir les efforts résultant de la répartition des contraintes.

3-1-2 Forgeage d'une barre

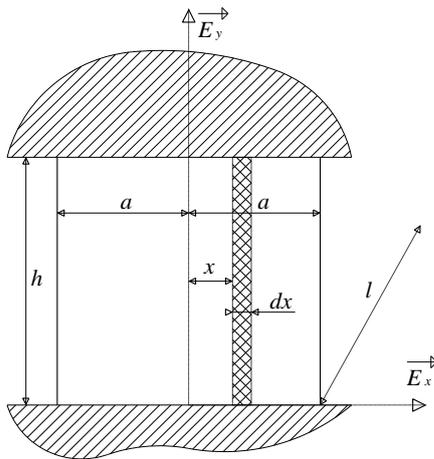
Nous allons présenter cette méthode sur l'exemple de forgeage d'une barre.

On considère une barre parallélépipédique de hauteur h , de largeur $2a$ et de longueur l . Placée entre les deux plateaux d'une presse, on impose un effort pour écraser la barre.

L'objectif étant de déterminer grossièrement cet effort, on formule les hypothèses simplificatrices suivantes :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité



- * la longueur étant supposée très grande devant les autres dimensions, on considère que l'état de déformation est plan.
- * Les plateaux de la presse sont rigides (indéformables).
- * Le matériau constituant la barre a un comportement rigide plastique.
- * Comme on s'intéresse au début de la mise en forme et vu les conditions de symétrie, on supposera que les axes $(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ sont les axes principaux de contrainte.
- * On suppose que l'état de contrainte ne dépend que la variable de position x .
- * Le frottement de l'outil est représenté par une contrainte tangentielle τ sur la surface de contact.

La caractérisation du frottement passe par un modèle.

Modèle de Coulomb

La contrainte tangentielle τ est proportionnelle à la contrainte normale de la surface de contact σ_{yy} mais reste limitée à la valeur de glissement τ_g . En pratique cette valeur limite est prise égale à la limite d'écoulement du matériau divisé par $\sqrt{3}$ (Critère de Von Mises).

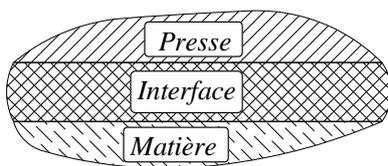
Modèle de la couche limite

La contrainte tangentielle τ est proportionnelle à la limite d'écoulement du matériau.

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_0$$

La valeur du coefficient de proportionnalité est fonction de la nature du contact :

- contact parfaitement lubrifié : $m = 0$
- contact parfaitement collant : $m = 1$

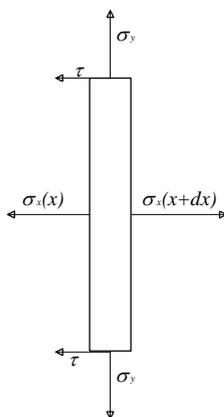


En fait, dans ce modèle, tout se passe comme si à l'interface il y avait une couche mince parfaitement adhérente à l'outil et à la pièce, couche réalisée dans un matériau de contrainte d'écoulement $m \sigma_0$.

En pratique, pour les opérations à chaud on se trouve souvent dans des conditions de contact collant ($m = 1$).

De toute façon il est possible de déterminer expérimentalement une valeur du coefficient m (test de l'anneau).

Comme le modèle de couche limite convient mieux pour la mise en forme à chaud, nous allons le retenir pour la suite de l'étude.



L'équation d'équilibre d'une tranche d'épaisseur dx prise sur le coté x positif nous donne :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{2\tau}{h} = \frac{2m}{\sqrt{3}h} \sigma_0$$

L'intégration de cette équation avec la condition $\sigma_{xx}(x=a)=0$ nous donne :

$$\sigma_{xx} = \frac{2m}{\sqrt{3}h} (x-a) \sigma_0 \leq 0 \quad \text{compression}$$

Le calcul de l'effort de forgeage passe par la détermination des contraintes σ_{yy} . Pour obtenir ces dernières, nous utilisons la loi de la normalité :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$(\delta\varepsilon)_{ik}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} \delta\lambda$$

En négligeant la déformation élastique (rigide plastique), cette loi de normalité devient :

$$(\delta\varepsilon)_{ik} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} \delta\lambda$$

En utilisant le critère de Von Misés, la fonction de charge est :

$$f(\sigma_{ik}, \xi) = J_2 - 2\sigma_0^2 = J_2 - \xi^2$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial f}{\partial \xi} = s_{ik}$$

On peut ainsi calculer la déformation axiale actuelle :

$$(\delta\varepsilon)_{zz} = s_{zz} \delta\lambda = \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \right) \delta\lambda$$

Dans l'hypothèse de déformation plane :

$$(\delta\varepsilon)_{zz} = 0$$

On obtient donc :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

D'autre part, le critère de Von Misés nous permet d'écrire :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 = 2\sigma_0^2$$

Compte tenu de la loi de comportement rigide plastique, comme la contrainte d'écoulement est constante et est égale à la limite élastique du matériau, la fonction d'écrouissage est :

$$\sigma_0 = \sigma_e$$

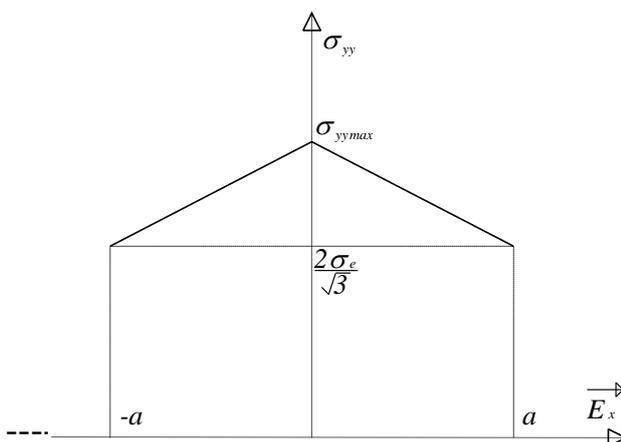
On a ainsi :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 = \frac{4}{3}\sigma_e^2$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_e$$

On peut donc en déduire la contrainte normale axiale :



$$\sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_e \left[\frac{m}{h}(x-a) - 1 \right]$$

La représentation fait apparaître une répartition linéaire décroissante. C'est la colline de frottement. Il est alors possible de calculer l'effort de compression :

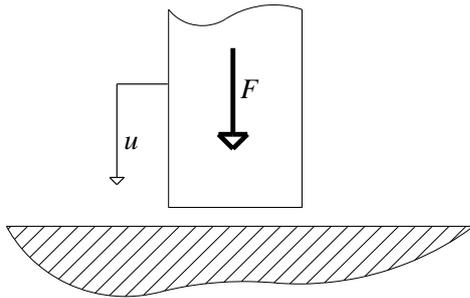
$$F = -2l \int_0^a \sigma_{yy} dx$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}}la\sigma_e \left(\frac{ma}{h} + 2 \right)$$

Remarque : on peut généraliser cette méthode à la déformation d'un corps à symétrie cylindrique. Les tranches sont alors des anneaux d'épaisseur dr .

3-2 Méthode de la borne supérieure

Cette méthode, qui demande une certaine expérience pour donner de bons résultats, peut conduire assez rapidement à une valeur majorante de l'effort. De plus, elle peut donner une assez bonne approximation du champ de déplacement de la matière.



Pour exposer la méthode, nous allons prendre l'exemple du poinçonnement d'un massif semi-infini.

L'application du théorème de la borne supérieure nécessite le choix d'un champ de déformations actuelles licites. Parmi cet ensemble de champ, le champ de déformation réel est celui qui minimise la fonctionnelle

$$G\left(\vec{\delta u}^*\right) = \int_v \sigma_{ij}^* (\delta \varepsilon)_{ij}^* dv + \int_v \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_v \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_s \bar{\phi}_i \delta u_i^* ds$$

La démonstration du théorème nous avait conduit à la relation :

$$\int_s \bar{\phi}_i \delta u_i^* ds \leq \int_v \sigma_{ij}^* (\delta \varepsilon)_{ij}^* dv + \int_v \rho \gamma_i \delta u_i^* dv - \int_v \rho f_i \delta u_i^* dv - \int_s \bar{\phi}_i \delta u_i^* ds$$

Dans cette inégalité, le premier membre représente le travail réel des forces inconnues sur les déplacements imposés (travail des réactions d'appuis). Ce terme est souvent nul (appuis fixes) et dans tous les cas positif.

Nous allons admettre que les forces de volume par unité de volume sont négligeables et que le problème est quasi statique. La fonctionnelle devient alors :

$$G\left(\vec{\delta u}^*\right) = \int_v \sigma_{ij}^* (\delta \varepsilon)_{ij}^* dv - \int_s \bar{\phi}_i \delta u_i^* ds$$

Le théorème devient donc :

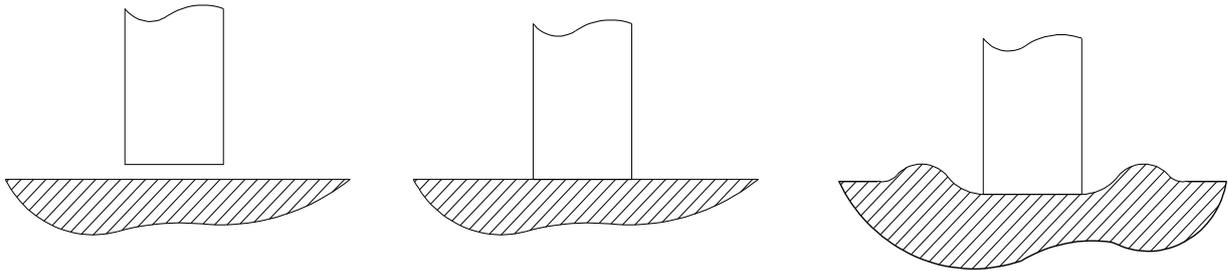
$$\int_v \sigma_{ij}^* (\delta \varepsilon)_{ij}^* dv \geq \int_s \bar{\phi}_i \delta u_i^* ds$$

Quelque soit le champ de déformation licite choisi, l'énergie dissipée par déformation plastique et frottement est supérieure à l'énergie motrice.

Ainsi, pour faire un calcul majorant de l'effort de poinçonnement, il faut définir un champ de déformation licite, c'est à dire un champ de déformation qui respecte les conditions aux limites sur les déplacements, les équations de compatibilité et la loi de comportement plastique.

3-2-1 Choix des déplacements

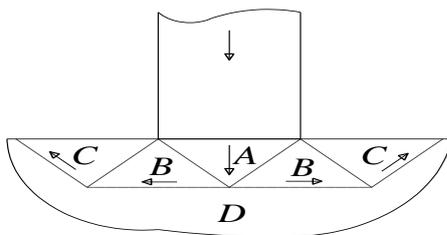
Afin d'éviter les problèmes de compatibilité, on va directement choisir un champ de déplacement. Ce dernier va être déterminé à partir de l'idée que l'on peut se faire de l'écoulement réel.



Le contact pièce - outil étant un contact avec frottement, on peut concevoir que le métal directement en contact avec l'outil n'a qu'un déplacement dans le sens de la pénétration. D'autre part, on imagine aisément la formation d'un bourrelet de matière au voisinage de l'outil.

L'idée que l'on peut se faire de l'écoulement commençant est la suivante :

Un coin de matière *A* est enfoncé par l'outil dans la pièce. Ce coin supposé rigide déplace horizontalement de la matière. Pour pouvoir se déplacer, les deux blocs *B* font remonter de la matière sous forme de blocs rigides *C*. L'ensemble de ces déplacements est limité dans l'espace, l'action de poinçonnement n'ayant des effets qu'au voisinage du poinçon.



On peut considérer les zones suivantes :

- * zone *A* formant le coin sous le poinçon
- * deux zones latérales *B* s'écoulant latéralement
- * deux zones *C* définissant le métal remontant (formation du bourrelet)
- * une zone *D* de métal ne participant pas à l'écoulement

Les hypothèses formulées sont les suivantes :

Les zones ont un comportement de solides rigides.

Le déplacement étant uniforme dans chaque zone, le travail de déformation va être traduit par le travail des efforts de cisaillement au contact des différentes zones.

L'énergie est donc essentiellement dissipée aux frontières.

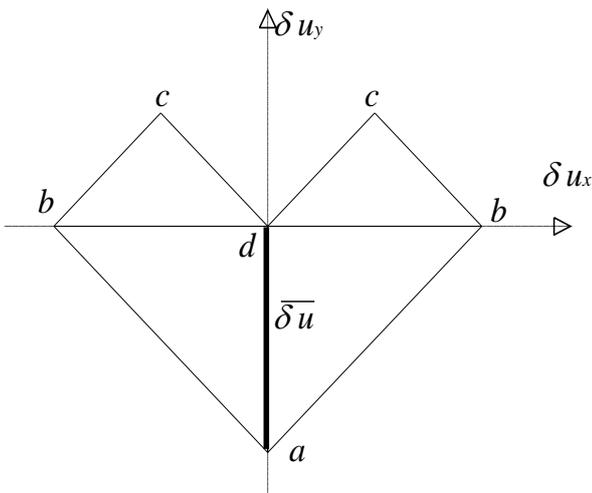
Pour aider à la compréhension, on utilise un diagramme des déplacements. Chaque zone est représentée par un point dans ce diagramme. Pour la construction de ce diagramme, on utilise la relation d'incompressibilité de la matière. En effet, en vertu de cette relation, on peut dire que pour le champ de déplacement la composante normale à une ligne de séparation de zone doit être continue à la traversée de la ligne de séparation. On traduit ainsi la continuité du débit de matière à la traversée de la ligne de séparation.

En d'autres termes, le déplacement relatif d'une zone par rapport à une autre zone adjacente ne peut qu'être parallèle à la ligne de séparation de cette zone.

Dans notre exemple la construction de ce diagramme des déplacements se fait de la façon suivante :

La zone *D* ayant un déplacement absolu nul, le point représentatif est confondu avec l'origine.

La zone *A* ayant un déplacement vertical, le point représentatif est sur l'axe vertical. De plus, comme la valeur du déplacement est connu ($\overline{\delta u}$), on peut définir la position exacte du point représentatif.



Pour obtenir le point représentatif de la zone B, on trace une droite parallèle à la ligne de glissement AB passant par le point représentatif de la zone B et on trace une droite parallèle à la ligne de glissement BD passant par le point représentatif de la zone D. L'intersection de ces deux droites donne le point représentatif de la zone B.

On recommence une construction similaire à la précédente pour avoir le point représentatif de la zone C.

Dans cet exemple, on constate que le diagramme obtenu est fonction d'un paramètre, par exemple la profondeur de la couche déformée. Prenons arbitrairement une profondeur égale à la demi largeur de l'outil. On obtient ainsi des triangles rectangles isocèles et les calculs sont simplifiés.

du champ de déplacement à la traversée des lignes de séparation.

Le diagramme ainsi défini permet de relever les discontinuité

Contact entre la zone A et la zone B

$$|\Delta(\delta u)| = \sqrt{2} \bar{\delta u}$$

Contact entre la zone B et la zone C

$$|\Delta(\delta u)| = \frac{\bar{\delta u}}{\sqrt{2}}$$

Contact entre la zone C et la zone D

$$|\Delta(\delta u)| = \frac{\bar{\delta u}}{\sqrt{2}}$$

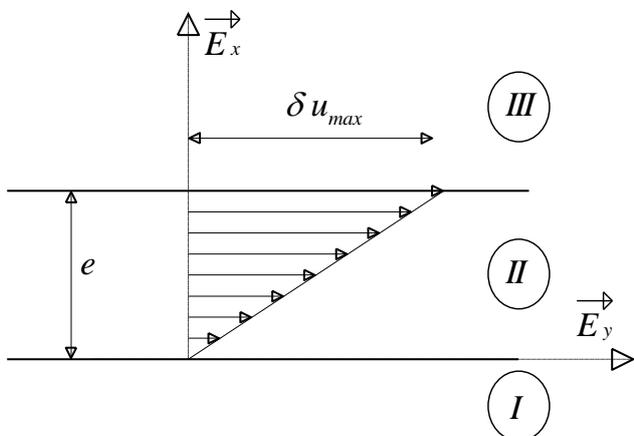
Contact entre la zone D et la zone B

$$|\Delta(\delta u)| = \bar{\delta u}$$

3-2-2 Calcul de l'énergie dissipée

Considérons le contact entre deux solides indéformables I et III. Imaginons qu'il existe un matériau déformable II d'épaisseur e entre ces deux solides. On peut alors calculer l'énergie dissipée dans cette couche déformable lors du glissement relatif des deux solides.

En considérant que la couche II est très mince et qu'elle est parfaitement adhérente aux deux solides, on peut faire l'hypothèse que la discontinuité de glissement entre les deux solides est répartie linéairement dans la couche II. Ainsi dans le référentiel choisi de tel sorte que l'axe \vec{E}_x soit l'axe normal à la surface de contact et que l'axe \vec{E}_y représente l'axe de la discontinuité de déplacement, on peut préciser les déplacements :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur l'axe } \vec{E}_x \quad \delta u_x = 0 \\ \text{sur l'axe } \vec{E}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \quad \delta u_y = 0 \\ 0 \leq x \leq e \quad \delta u_y = \frac{x}{e} \delta u_{\max} \\ e \leq x \quad \delta u_y = \delta u_{\max} \end{array} \right. \\ \text{sur l'axe } \vec{E}_z \quad \delta u_z = 0 \end{array} \right.$$

Dans la couche II (la seule qui soit déformée), le tenseur des déformations actuelles est :

Michel MAYA
Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\overline{(\delta\varepsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta u_{\max}}{2e} & 0 \\ \frac{\delta u_{\max}}{2e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

En supposant que le critère de Von Misés est utilisable, on peut calculer la déformation actuelle équivalente par la relation :

$$(\delta\varepsilon)_{\text{équi}} = (\delta\varepsilon)_{\text{équi}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta\varepsilon)_{ik}^p (\delta\varepsilon)_{ik}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta\varepsilon)_{ik} (\delta\varepsilon)_{ik}$$

On obtient alors :

$$(\delta\varepsilon)_{\text{équi}} = \frac{\delta u_{\max}}{e\sqrt{3}}$$

D'autre part pour un matériau rigide plastique, la contrainte équivalente est égale à la contrainte d'écoulement σ_e .

Ainsi l'énergie dissipée par unité de volume de matériau déformé est :

$$\delta W = \sigma_e (\delta\varepsilon)_{\text{équi}} = \frac{\sigma_e \delta u_{\max}}{e\sqrt{3}}$$

On peut alors définir l'énergie dissipée par unité de surface de contact :

$$\delta W_s = \frac{\sigma_e \delta u_{\max}}{\sqrt{3}}$$

Comme cette énergie est indépendante de l'épaisseur du matériau déformable II , la relation reste valable même en l'absence du matériau (épaisseur nulle). On peut donc utiliser le résultat précédent pour calculer la dissipation totale d'énergie sur toutes les surfaces de contacts.

Les expressions suivantes sont calculées en considérant que l'on travaille avec une tranche d'outil d'épaisseur unité :

Lignes	Surface (longueur)	$ \Delta(\delta u) $	δW
entre A et B	$2a\sqrt{2}$	$\overline{\delta u}\sqrt{2}$	$(4a\overline{\delta u}\sigma_e)/\sqrt{3}$
entre B et C	$2a\sqrt{2}$	$\overline{\delta u}/\sqrt{2}$	$(2a\overline{\delta u}\sigma_e)/\sqrt{3}$
entre C et D	$2a\sqrt{2}$	$\overline{\delta u}/\sqrt{2}$	$(2a\overline{\delta u}\sigma_e)/\sqrt{3}$
entre D et B	$4a$	$\overline{\delta u}$	$(4a\overline{\delta u}\sigma_e)/\sqrt{3}$

Ainsi l'énergie totale dissipée est : $\delta W = 12a \frac{\overline{\delta u} \sigma_e}{\sqrt{3}}$

3-2-3 Calcul de la force motrice

L'énergie motrice réelle est :

$$\delta E = F \overline{\delta u} \quad \text{avec } F \text{ la force pour l'unité de longueur de l'outil.}$$

Le théorème de la borne supérieure nous donne donc :

$$F \leq 12a \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

On peut alors calculer un majorant de la pression moyenne :

$$P_{\text{moy}} = \frac{F}{2a} \leq \frac{6}{\sqrt{3}} \sigma_e = 3,46 \sigma_e$$

3-2-4 Remarques

* Avec la cinématique choisie, le phénomène de frottement au contact outil - pièce n'apparaît pas. Pour tenir compte de ce phénomène, il faut envisager un déplacement relatif des points de la surface de contact. Dans ce cas l'énergie surfacique dissipée par frottement se calcule avec la formule :

$$\delta W = \frac{m \sigma_e}{\sqrt{3}} |\Delta(\delta u)|$$

* On peut être surpris du fait que la zone rigide A vienne s'enfoncer (forme de coin) dans la zone rigide D sans la déformée. En fait, il faut considérer la cinématique juste au début de l'enfoncement. La meilleure solution serait de travailler avec le théorème des puissances virtuelles plutôt qu'avec le théorème des travaux virtuels.

* Il est possible d'optimiser la méthode en introduisant des paramètres dans la description cinématique. L'énergie dissipée devient alors une fonction de ces paramètres qu'il convient de minimiser. On se retrouve alors en face d'un problème classique de recherche d'extrémum.

Ainsi dans notre exemple nous avons fixé arbitrairement la valeur de la profondeur de la couche déformée à la demi valeur de la largeur d'outil (a). Il est tout à fait possible de laisser ce paramètre libre. L'optimisation vis à vis de paramètre nous conduit à une énergie dissipée donnée par :

$$\delta W = \frac{16}{\sqrt{2}} a \frac{\overline{\delta u} \sigma_e}{\sqrt{3}}$$

La valeur de la profondeur de la couche déformée optimale est $a\sqrt{2}$.

3-3 Méthode de la borne inférieure

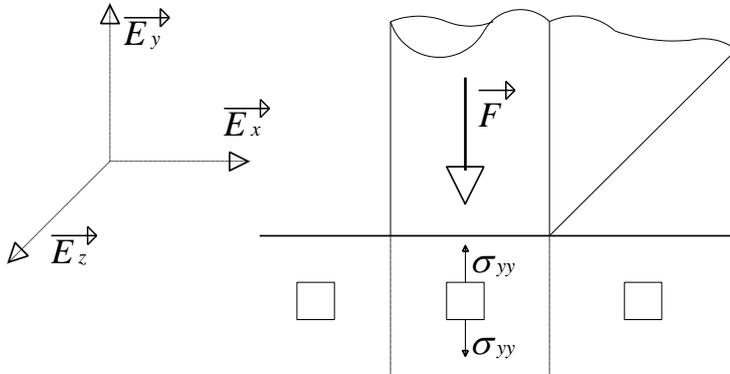
Pour appliquer le théorème de la borne inférieure, il faut se donner un champ de contrainte licite. Le théorème traduisant le fait que la fonctionnelle $H(\overline{\sigma^*}) = \int_s \phi_i^* \overline{\delta u}_i ds$ est maximale pour le champ de contrainte solution du problème, on peut dire que l'énergie motrice calculée à partir d'un champ de contrainte licite quelconque est inférieure à l'énergie motrice réelle.

Reprenons l'exemple précédent du poinçonnement et définissons un champ de contrainte licite, c'est à dire un champ de contrainte vérifiant les équations d'équilibre, permettant de vérifier les conditions aux limites sur les efforts et respectant le critère de plasticité en tous points de l'espace.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

On suppose que le trièdre $(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ est principal pour tous les points de la matière.



On découpe la pièce en deux zones. La zone A est située juste en dessous de l'outil. La zone B est la partie complémentaire.

On imagine les champs de contrainte suivants :

$$\text{zone A : } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

$$\text{zone B : } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

Vu la grande longueur de l'outil, on peut considérer que l'on a un état plan de déformation :

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad \text{avec} \quad (\delta\varepsilon)_{zz} = 0$$

Le critère de Von Misés nous permet d'écrire :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e \quad \text{dans le cas d'un comportement plastique}$$

Pour que le champ de contrainte choisi, déjà statiquement admissible, soit aussi plastiquement admissible, il faut qu'il vérifie cette équation.

Ainsi dans la zone A on a :

$$\sigma_{yy} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e$$

On peut donc donner une valeur majorante de la pression de contact :

$$p_{moy} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e = 1,15 \sigma_e$$

Remarque : Il est possible d'optimiser la méthode en prenant un champ de contrainte plus proche de la réalité. Par exemple on peut prendre :

$$\text{zone A : } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

$$\text{zone B : } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$$

Le résultat est alors :

$$P_{moy} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}\sigma_e = 2,31\sigma_e$$

3-4 Conclusions

Les méthodes précédentes permettent d'encadrer la solution du problème :

$$3,27\sigma_e \geq P_{moy} \geq 2,31\sigma_e$$

La solution exacte (méthode des éléments finis, méthodes des lignes de glissement) est connue. On a :

$$P_{moy} = \frac{2+\pi}{\sqrt{3}}\sigma_e = 2,97\sigma_e$$

On peut ainsi constater les résultats apportés.

En pratique, la méthode de la borne inférieure est moins souvent utilisée que la méthode de la borne supérieure, pour deux raisons :

- * Il est plus difficile d'imaginer un champ virtuel de contraintes qu'un champ virtuel de déplacement.
- * Il est plus intéressant d'avoir un majorant des grandeurs technologiques plutôt qu'un minorant.

THERMOMECHANIQUE

1- LES LOIS DE CONSERVATION

1-1 Expression générale d'une loi de conservation

En règle générale, les lois de la physique expriment un bilan d'une quantité A . En effet, on est souvent obligé de constater que les transformations imposées à un milieu ne peuvent se faire qu'à condition de respecter des lois relativement bien établies. Il est à noter que ces lois sont souvent issues de l'expérience et que de ce fait elles ne représentent qu'une certaine axiomatique.

La forme générale d'une telle loi est :

$$\frac{d}{dt} \int_D A dv = \int_D A(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds + \int_D \frac{\partial A}{\partial t} dv$$

Dans le premier terme, on veut exprimer le taux de variation de la quantité volumique A contenue dans le **domaine matériel D**. La variation de l'intégrale provient d'une part de la variation du domaine d'intégration et d'autre part de la variation de la quantité volumique intégrée.

Il est à noter que dans ce formalisme, on distingue l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t}$. En règle générale, la quantité A est fonction de la position du point d'étude (variables spatiales) et du temps (variable temporelle). Du fait de l'évolution du point d'étude, les variables spatiales sont bien entendu dépendantes du paramètre temps. On se trouve dans un problème de dérivation de fonction de plusieurs variables ($A(x_i, t)$) mêlé à un problème de dérivation de fonction de fonction ($A(x_i(t), t)$). Il convient donc de bien interpréter les ordres de dérivation.

L'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ représente la variation temporelle de la fonction en prenant en compte l'évolution spatiale du domaine d'étude. On le désigne sous la dénomination de **dérivée particulaire**. C'est la dérivée associée à une particule que l'on suit dans son mouvement.

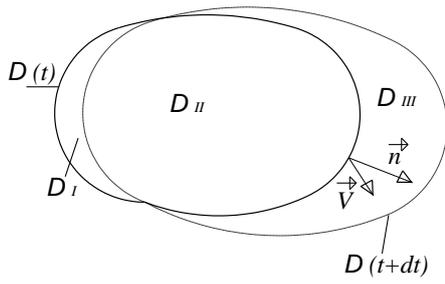
En ce qui concerne l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t}$ on ne considère que les variations de la fonction directement liées à la variable temps. C'est la dérivée partielle classique vis à vis du temps. Pour l'obtenir, on considère que dans la fonction étudiée, la position du domaine est figée. En définitive on est amené à étudier la fonction $A(x_i = cte, t)$.

La démonstration de la forme intégrale de l'équation de conservation peut être la suivante :

On considère un domaine continu matériel D qui se déplace à la vitesse \vec{V} entre les instants t et $t+dt$.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité



A l'instant t les particules matérielles occupent un espace défini par le volume $D(t) = D_I + D_{II}$.

A l'instant $t+dt$, l'espace occupé par les particules matérielles est défini par le volume $D(t) = D_{II} + D_{III}$.

Le volume D_{II} représente donc l'espace commun aux deux instants t et $t+dt$.

On considère l'intégrale $J(t) = \int_{D(t)} A(x_i, t) dv$. La variation de cette fonction entre les deux instants t et $t+dt$ nous donne :

$$J(t+dt) - J(t) = \int_{D(t+dt)} A(x_i, t+dt) dv - \int_{D(t)} A(x_i, t) dv$$

$$J(t+dt) - J(t) = \int_{D_{II}} [A(x_i, t+dt) - A(x_i, t)] dv + \int_{D_{III}} A(x_i, t+dt) dv - \int_{D_I} A(x_i, t) dv$$

D'autre part nous pouvons écrire :

$$\left[\int_{D_{II}} \frac{\partial A}{\partial t}(x_i, t) dv \right] dt = \int_{D_{II}} [A(x_i, t+dt) - A(x_i, t)] dv$$

Et puisque pour les domaines D_I et D_{III} , l'élément de volume est donné par :

$$dv = \pm \vec{V} \cdot \vec{n} ds dt$$

On a :

$$\left[\int_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} ds \right] dt = \int_{D_{III}} A(x_i, t+dt) dv - \int_{D_I} A(x_i, t) dv$$

On peut donc écrire :

$$J(t+dt) - J(t) = \left[\int_{D_{II}} \frac{\partial A}{\partial t}(x_i, t) dv \right] dt + \left[\int_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} ds \right] dt$$

On obtient bien ainsi le résultat voulu.

La dernière intégrale représente le flux de la fonction A au travers du contour fermé ∂D délimitant le volume D_{II} .

Pour ce dernier terme, on peut le transformer en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_D \text{div}(A \vec{V}) dv$$

On peut donc écrire deux formes pour une équation de conservation :

$$\frac{d}{dt} \int_D A dv = \int_D \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{div}(A \vec{V}) \right) dv \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_D A dv = \int_{\partial D} A(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds + \int_D \frac{\partial A}{\partial t} dv$$

1-2 Equation de continuité

Cette équation est fondamentale car elle traduit la conservation de la masse au cours de la transformation. Elle est déduite du fait que l'on étudie un **domaine matériel** et qu'il n'y a pas de transformation matière - énergie.

La masse d'un système matériel occupant un domaine $D(t)$ à l'instant t est reliée à la masse volumique par l'équation :

$$M = \int_D \rho(x_i, t) dv$$

La conservation de la masse signifie que la dérivée particulière de M est nulle, ce qui nous donne :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_D \rho(x_i, t) dv \right) = 0$$

On peut donc en déduire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

D'autre part, la masse volumique étant une fonction scalaire, on a :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) = 0$$

Enfin nous avons l'égalité :

$$\frac{d\rho(x_i(t), t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho)$$

Donc, en résumé, les formes locales de l'équation de continuité sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0$$

1-3 Loi fondamentale de la mécanique

Grâce entre autres à Newton et sa pomme, nous pouvons formuler un principe fondamental de la mécanique.

La citation complète fait état de l'existence d'une mesure du temps et d'un référentiel privilégié (dénommé galiléen) tels que le taux de variation du torseur cinétique galiléen de tout domaine matériel soit égal aux torseurs des efforts appliqués par "l'extérieur" sur le domaine.

D'une façon très schématique nous allons écrire :

$$\frac{d}{dt} \{C_s\} = \{F^{ext}\}$$

En mécanique des milieux continus, la notion de force concentrée n'existe pas. En effet, un effort non infinitésimal appliqué sur une surface nulle conduirait immédiatement à un niveau de contraintes locales infini. En conséquence nous ne pourrions prendre en compte que des efforts de type surfacique ou volumique. Le principe fondamental de la mécanique nous conduit donc à l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{C_g\} &= \{F_{sur}^{ext}\} + \{F_{vol}^{ext}\} \\ \frac{d}{dt}\{C_g\} &= \int_{\partial D} \{\vec{\phi}(M, \vec{n}) ds\} + \int_D \{\rho \vec{f} dv\} \\ \frac{d}{dt}\{C_g\} &= \int_{\partial D} \{\overline{\sigma} \vec{n} ds\} + \int_D \{\rho \vec{f} dv\} \\ \frac{d}{dt}\{C_g\} &= \int_D \{div(\overline{\sigma}) + \rho \vec{f}\} dv \end{aligned}$$

Cette équation nous conduit rapidement à la forme locale des équations d'équilibre :

$$\rho \vec{\gamma} = div(\overline{\sigma}) + \rho \vec{f}$$

Ainsi le principe fondamental de la mécanique apparaît comme une conservation de la quantité de mouvement.

On montre aussi que la conservation du moment cinétique conduit à la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

1-4 Premier principe de la thermodynamique

Ce premier principe est encore appelé loi de conservation de l'énergie. Il exprime le fait que la variation de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développée sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps.

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = P^{ext} + \dot{Q} = \frac{\delta W^{ext}}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t}$$

On remarquera cette fois l'emploi de la notation $\frac{\delta}{\delta t}$ qui est utilisée pour indiquer que les fonctions dérivées ne sont pas de fonctions d'état et qu'elles ne dérivent pas d'un potentiel.

L'énergie interne est une grandeur extensive (additive) et on peut définir une énergie interne massique e :

$$E = \int_D \rho e dv$$

De la même façon, on pourra écrire pour l'énergie cinétique :

$$K = \int_D \frac{\rho V^2}{2} dv$$

La puissance des efforts extérieurs nous est donnée par une décomposition en efforts surfaciques et en efforts volumiques :

$$P^{ext} = \int_{\partial D} \vec{\phi}(M, \vec{n}) \cdot \vec{V} ds + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv$$

On suppose que les échanges de chaleur sont de deux types:

- * surfacique → conduction
- * volumique → rayonnement

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Le terme de conduction sur la surface frontière est l'intégrale de surface d'une densité $h(M, \vec{n})$, où \vec{n} est la normale extérieure en M à la surface. Cette densité s'exprime sous la forme du flux d'un vecteur courant de chaleur sortant :

$$h(M, \vec{n}) = -\vec{q}(M) \cdot \vec{n}(M)$$

Par convention, les quantités de chaleur reçues par le système seront notées positivement et celles perdues négativement.

Le terme de rayonnement est l'intégrale d'une densité volumique qui correspond au taux de chaleur reçue (rayonnement externe, effet joule, ou réaction chimique interne par exemple).

On a donc pour la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_D r dv$$

On peut donc écrire l'équation de conservation de l'énergie sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dv = \int_{\partial D} \vec{\phi}(M, \vec{n}) \cdot \vec{V} ds + \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_D r dv$$

D'autre part on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique, à savoir que la variation de l'énergie cinétique du système est la somme de la puissance des efforts extérieurs et des efforts intérieurs :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \frac{\rho V^2}{2} dv = P^{ext} + P^{int}$$

Ce dernier terme de puissance peut être calculé à partir de l'énergie de déformation du système :

$$P^{int} = - \int_D \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv = - \int_D \overset{=}{=} \sigma : \dot{\epsilon} dv$$

Dans cette expression, le symbole $:$ représente la double contraction des tenseurs contraintes et taux de déformation.

On peut donc écrire l'équation de conservation de l'énergie ainsi :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} - P^{int}$$

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e dv = \int_D \left(\overset{=}{=} \sigma : \dot{\epsilon} + r \right) dv - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds$$

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient une expression locale de ce bilan :

$$\rho \frac{de}{dt} = \overset{=}{=} \sigma : \dot{\epsilon} + r - \text{div}(\vec{q})$$

On peut donc dire que la variation de l'énergie interne massique est due à la puissance dissipée par les efforts intérieurs (efforts de déformation) et à un apport de chaleur.

1-5 Deuxième principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique postule l'existence d'un champ scalaire positif, appelé température et noté T et d'une fonction d'état du système additive, appelée entropie, notée S et telle que l'on ait toujours l'inégalité :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{\delta t} \leq T \frac{dS}{dt}$$

L'égalité n'est obtenue que dans le cas très particulier des transformations réversibles.

La fonction entropie n'est donc définie que par sa différentielle et elle ne peut être calculée qu'à une constante additive près. Généralement on travaillera avec l'entropie massique s . On a donc :

$$\int_D \rho \frac{ds}{dt} dv \geq \int_D \frac{r}{T} dv - \int_{\partial D} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} ds$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut en déduire une forme locale :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0$$

De plus on a une identité fondamentale :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div}(\vec{q}) - \frac{1}{T^2} \vec{\text{grad}}(T) \cdot \vec{q}$$

On peut donc obtenir l'**inégalité de Clausius - Duhem** :

$$\overset{=}{\sigma} : \dot{\varepsilon} + \rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}(T) \geq 0$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\overset{=}{\sigma} : \dot{\varepsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}(T) \geq 0$$

En faisant intervenir l'**énergie libre massique** $\psi = e - Ts$.

En fait le second principe permet d'exprimer l'écart entre le processus étudié et un processus réversible. Comme on peut le constater, cette différence fait apparaître deux origines :

* thermique par le terme $-\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}(T)$

* mécanique par le terme $\overset{=}{\sigma} : \dot{\varepsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$

Le signe négatif du terme d'origine thermique s'explique facilement par la convention choisie. En fait on traduit ainsi l'irréversibilité thermique. Un corps chaud ne peut que céder de la chaleur à un environnement plus froid, alors qu'à l'inverse un corps froid ne pourra que recevoir de la chaleur (apport d'énergie sous forme calorifique).

Le terme d'origine mécanique se présente sous la différence de deux quantités. La seconde quantité est définie comme étant la partie réversible de la puissance dissipée par la déformation. Elle vient toujours en déduction de la puissance de déformation.

2- THERMOMECHANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

2-1 Equation de la chaleur

Pour établir cette équation, nous formons les hypothèses suivantes :

* le matériau est à liaisons parfaites et on néglige toute transformation chimique ou physique de la matière. On montre qu'alors l'énergie interne est proportionnelle à la température absolue T par l'intermédiaire d'une constante c appelée capacité calorifique massique :

$$\frac{d e}{d t}=c \frac{d T}{d t}$$

* on néglige le terme volumique de taux de chaleur reçu :
 $r \approx 0$

L'équation de l'énergie devient alors :

$$\rho c \frac{d T}{d t}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}(T)\right)=\sigma \cdot \dot{\varepsilon}-\text{div}(\vec{q})$$

On fait généralement l'hypothèse que le matériau suit la **loi de conduction de Fourier**, c'est à dire que le flux de chaleur est une fonction linéaire du gradient thermique :

$$\vec{q}=-k \vec{\text{grad}}(T)$$

Le scalaire k est la conductivité thermique. Si le corps n'est pas isotrope, la conductivité thermique sera représentée par un tenseur. Si le corps est homogène, cette conductivité thermique est une constante.

On obtient alors **l'équation de la chaleur** :

$$\rho c \frac{d T}{d t}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}(T)\right)=\sigma \cdot \dot{\varepsilon}+k \Delta T$$

La résolution de cette équation permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Pour être résolue, cette équation nécessite une bonne connaissance des conditions initiales et des conditions aux limites du domaine.

Les conditions thermiques que l'on peut rencontrer aux limites sont :

* température imposée (dans le cas d'une paroi parfaitement régulée thermiquement).

* flux imposé (un flux nul correspond à une paroi parfaitement isolée, c'est à dire adiabatique).

* échange par convection : $-k \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}(T)=\alpha\left(T-T_{\text{ext}}\right)$

où α est le coefficient de convection et T_{ext} la température du second milieu.

* échange par rayonnement : $-k \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}(T)=\varepsilon \sigma\left(T^4-T_{\text{ext}}^4\right)$

où ε est l'émissivité, σ la constante de Stefan et T_{ext} la température du second milieu.

2-2 Thermo-élasticité linéaire

Les lois de comportement des milieux continus doivent obéir à quelques principes :

* elles doivent être déterministes, c'est à dire que la réponse du milieu à l'instant t ne doit dépendre que de l'histoire antérieure du milieu.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

* elles doivent être objectives, c'est à dire indépendantes du référentiel choisi pour les exprimer.

* elles doivent satisfaire aux principes fondamentaux et en particulier au second principe de la thermodynamique.

Bien évidemment, ces généralités ne permettent pas de définir la forme détaillée des lois de comportement et encore moins d'obtenir une loi de comportement universelle. Pour poursuivre il faut faire des hypothèses supplémentaires, hypothèses qui seront souvent déduites de l'observation expérimentale.

Pour traduire le phénomène élastique d'un comportement de matériau, on peut dire que la réponse du milieu est parfaitement décrite par la connaissance de la température et du tenseur des déformations.

Reprenons l'inégalité de Clausius - Duhem :

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}(T) \geq 0$$

Avec l'hypothèse formulée, on peut dire que la fonction d'état ψ (énergie libre massique) est une fonction uniquement des paramètres T et ε . On peut donc écrire :

$$\frac{d\psi(\varepsilon, T)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt}$$

En reportant dans l'inégalité de Clausius - Duhem, on obtient :

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \frac{dT}{dt} - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}(T) \geq 0$$

Comme les seuls paramètres retenus pour l'étude sont la température et le tenseur des déformations, l'inégalité précédente doit être satisfaite quels que soient $\dot{\varepsilon}$ et $\frac{dT}{dt}$. On peut donc dire :

$$\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0$$

Ainsi on constate que la connaissance de la fonction d'état énergie libre massique permet de définir la loi de comportement du matériau. Pour cette raison on donne le nom de **potentiel élastique** à la fonction énergie libre $\rho\psi$.

Pour poursuivre, on peut formuler l'hypothèse des petites perturbations, c'est à dire que la température T et le tenseur des déformations **linéarisé** sont les seules variables d'état du système.

La relation de comportement s'écrit :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}$$

Par cohérence avec l'approximation, nous ne garderons dans le développement du tenseur des contraintes en fonction du tenseur des déformations que les termes d'ordre 1. De même pour le paramètre température.

On obtient alors la loi de comportement **thermoélastique linéaire** :

$$\sigma = \sigma^0 + A : \varepsilon - \beta (T - T^0)$$

avec : σ^0 : tenseur des contraintes dans la configuration initiale
 A : tenseur d'élasticité du quatrième ordre

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$\bar{\beta}$: tenseur des coefficient de dilatation thermique
 T^0 : température dans la configuration initiale

Si le matériau est homogène et isotrope, la condition d'objectivité nous conduit alors à un tenseur d'élasticité déterminé par deux constantes et le tenseur des coefficients de dilatation thermique est sphérique ($\bar{\beta} = \beta \bar{I}$).

La loi de comportement devient alors :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + 2\mu \bar{\varepsilon} + \left(\lambda \text{trace}(\bar{\varepsilon}) - \beta(T - T^0) \right) \bar{I}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^0 \right) + \left[\alpha(T - T^0) - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^0) \right] \bar{I}$$

avec les relations :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Premier coefficient de Lamé = Module de Coulomb}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{Deuxième coefficient de Lamé}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{Module d'Young}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad \text{Coefficient de Poisson}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu} \quad \text{Coefficient de dilatation thermique linéaire}$$

3- COMPORTEMENT PLASTIQUE

La plasticité est la propriété qu'ont certains corps de pouvoir subir sans rupture des déformations permanentes irréversibles. Historiquement, les premières études faites sur ce comportement ont été réalisées par TRESCA.

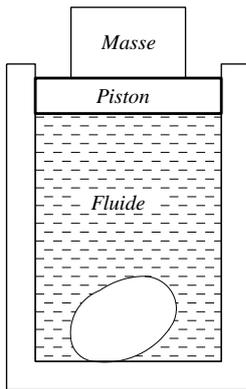
On a très rapidement recherché à établir un lien entre la physique des solides et les relations expérimentales globales. On admet communément que la déformation plastique traduit un glissement de plans cristallographiques. La théorie des dislocations a permis de faire le lien entre les études microscopiques et les relations globales de comportement d'une éprouvette.

Dans ce chapitre nous nous contenterons de rappeler les notions élémentaires associées à la théorie de la plasticité.

3-1 Comportement plastique expérimental

Pour cerner ce mode de comportement d'un matériau, plusieurs expériences peuvent être tentées. Après avoir étudié des états de contraintes simples, nous exprimerons des lois permettant, d'une part de retrouver les résultats sur les cas simples, d'autre part d'extrapoler le comportement dans des cas plus compliqués et donc plus généraux.

3-1-1 Compression hydrostatique



La sollicitation de compression hydrostatique a pour but de créer sur la totalité de la surface extérieure du domaine une pression uniforme.

L'expérience est très simple à faire. Il suffit de placer le corps d'étude dans un domaine fluide et d'imposer une valeur de pression à ce fluide.

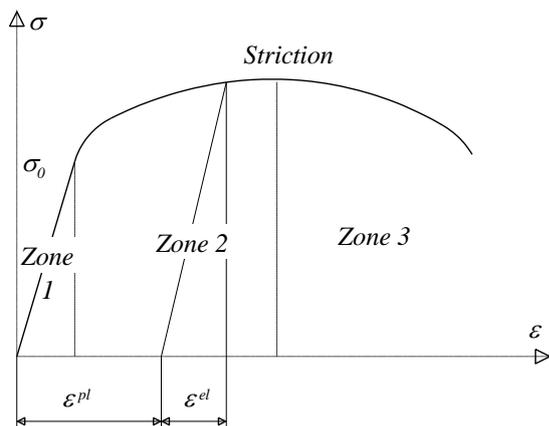
Les résultats montrent que, même pour une valeur élevée de la pression, le corps reprend toujours sa forme et ses dimensions initiales. Il n'y a donc aucune déformation plastique enregistrée.

Ce constat est fondamental pour l'étude du comportement plastique.

3-1-2 Traction uniaxiale

La sollicitation de traction uniaxiale semble très simple à réaliser sur une éprouvette. On peut en effet réaliser des éprouvettes filiformes qui, placées dans la machine de traction, vont subir une sollicitation de traction.

Il est important de noter que la traction est souvent réalisée à froid.



On impose à l'éprouvette une déformation globale que l'on note ε et on enregistre la contrainte σ . Dans les faits, on effectue des relevés différents. Ainsi, au lieu de la déformation globale, on enregistre soit un déplacement de traverse, soit une variation de longueur d'un segment de l'éprouvette, soit effectivement une déformation. Pour l'enregistrement de la contrainte, on relève souvent la valeur de l'effort appliqué F (parfois en utilisant la pression). Le passage à une valeur de contrainte nécessite la division par une aire S qui est l'aire de la section droite d'étude de l'éprouvette.

Après d'éventuels calculs et transpositions on obtient un diagramme $\sigma(\varepsilon)$. L'analyse de la courbe nous permet de distinguer trois zones auxquelles on peut associer des comportements différents.

Zone 1 Dans cette zone le comportement est élastique, c'est à dire réversible. Si on libère l'éprouvette, celle-ci reprend sa forme initiale et un état de déformation nul. Le comportement est bijectif dans le sens où à chaque contrainte ne peut être associé qu'à une déformation et vice versa.

Souvent la relation peut être approximée à une fonction linéaire. On obtient alors la classique loi de Hooke de l'essai de traction $\sigma = E \varepsilon$.

Zone 2 On rencontre des déformations irréversibles. Après relâchement des efforts, on constate que d'une part la courbe de décharge ne suit pas la courbe de charge et que d'autre part il subsiste des déformations permanents. C'est le phénomène de plasticité.

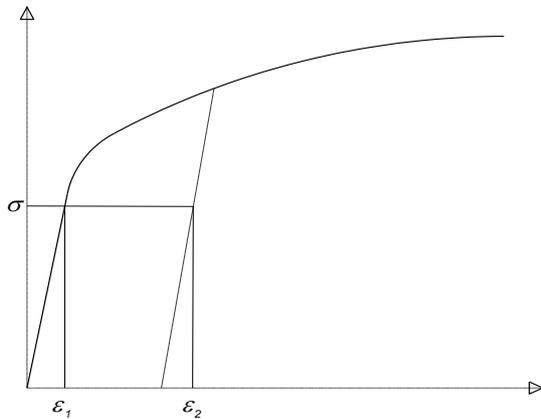
On a donc une déformation résiduelle qui traduit la partie irréversible de la transformation. Cette déformation n'est enregistrable qu'à un certain de contrainte appliquée. On définit ainsi le seuil de plasticité. La contrainte au seuil est nommée **limite élastique** et est notée σ_0 .

La courbe de décharge suivie est représentée par une droite dont la pente est donnée par la valeur du module d'Young. Ce phénomène est élastique dans le sens où on suivra cette même droite en cas de rechargement de l'éprouvette. Arrivé à la valeur de contrainte maxi appliquée dans les cycles précédents, on suit à nouveau la courbe plastique du matériau.

Ces remarques nous amènent à considérer qu'il y a une évolution possible de la limite élastique. C'est le phénomène d'écrouissage. La nouvelle limite élastique est appelée **contrainte d'écoulement**. En général, la contrainte d'écoulement croît avec la déformation. Dans le cas contraire, on parlera de phénomène d'adoucissement.

Zone 3 C'est le domaine de la striction. La section de l'éprouvette ne demeure plus constante dans la longueur. On constate une forte diminution dans une zone très localisée, pratiquement toujours la zone centrale de l'éprouvette.

La force de traction passe par un maximum en début de striction, puis décroît régulièrement jusqu'à la rupture. La contrainte calculée en faisant le rapport de la force de traction avec la section de striction décroît elle aussi.

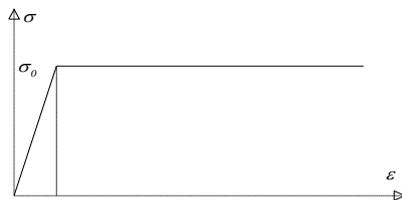


En fait une analyse fine locale montre que l'état de contrainte n'est plus unidimensionnel. Pour interpréter correctement les résultats, il convient de travailler en contrainte équivalente. On constate alors que la courbe (contrainte équivalente - déformation) est monotone croissante.

Pour les deux dernières zones, il faut remarquer que "l'histoire du chargement" joue un rôle important pour la détermination du couple contrainte - déformation. Il n'y a plus de bijection entre les deux ensembles. Pour passer d'un état initial à un état final, il faut connaître chaque étape intermédiaire, il faut faire un suivi "pas à pas". Ainsi, contrairement à la zone à comportement élastique, la connaissance de l'état final est fonction du chemin de chargement.

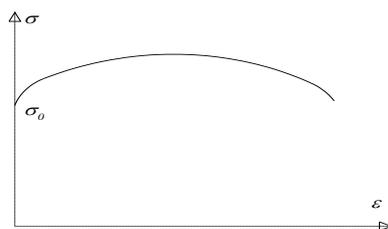
3-2 Modélisations courantes

Le comportement plastique réel étant relativement complexe, on utilise souvent des modèles simplifiés pour effectuer les calculs. Parmi ces modèles on peut citer :



***le comportement élastique parfaitement plastique**

Dans ce cas, le phénomène d'écrouissage n'est pas pris en compte. La contrainte d'écoulement est constante et est égale à la limite élastique du matériau. C'est un modèle de calcul sécurisant.



***le comportement rigide plastique**

Dans les applications de mise en forme de métaux, les déformations sont très importantes ($\geq 10\%$). La quote part des déformations élastiques ($\approx 0,5\%$) est très faible devant celle des déformations plastiques. Il est donc tout à fait légitime de négliger la déformation élastique.

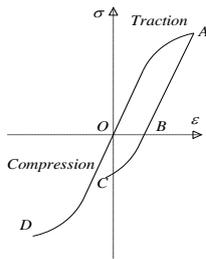


***le comportement rigide parfaitement plastique**

C'est une combinaison des deux modélisations précédentes. On néglige alors l'élasticité et l'écrouissage.

C'est bien entendu le modèle de calcul le plus simple, mais aussi le plus simpliste.

Ces modèles ne sont que des schématisations très imparfaites d'une réalité plus complexe. Dans les faits on peut être confronté à des phénomènes annexes difficilement modélisables et qui ont une incidence non négligeables sur le résultat final.



Dans cet ordre d'idée, on peut citer l'**effet Bauschinger**. Pour certains matériaux (dont la fonte par exemple), la courbe contrainte - déformation d'un essai de traction compression est très dissymétrique.

De même, une traction préalable OA , suivie d'un déchargement AB , puis d'une compression BC , conduit à un état de contrainte différent d'une simple compression OD à partir de l'état initial.

Le modèle peut aussi être compliqué par la présence d'un phénomène d'érouissage cyclique. Si on fait subir à une éprouvette un cycle alternatif entre soit deux valeurs de contraintes, soit deux valeurs de déformations, on peut parfois constater qu'il n'est pas possible de stabiliser les courbes enregistrées. On peut, par exemple, observer en contrainte imposée une stabilisation de la réponse sur un cycle limite (c'est l'**accommodation** ou même, lorsque le cycle limite est réduit à un segment de droite, l'**adaptation**) ou une non-stabilisation, avec augmentation progressive de la déformation à chaque cycle (c'est l'**effet de rochet**). Dans la suite nous négligerons ces particularités.

Bien évidemment, un modèle de comportement n'est valable que dans des conditions bien précises. En particulier on peut modifier les valeurs de la contrainte d'écoulement d'un matériau en lui faisant subir un recuit. Les défauts accumulés par l'érouissage peuvent être partiellement gommés par ce traitement thermique. Le matériau a alors eu une restauration.

3-3 Principaux critères utilisés

3-3-1 Forme générale d'un critère de plasticité

Dans le cas général d'utilisation d'un matériau, nous nous trouvons rarement dans un état uniaxial de traction. Pour pouvoir utiliser les résultats précédents, il convient de faire une équivalence entre l'état réel de notre matériau au point d'étude et l'état uniaxial obtenu dans l'essai de traction.

La question la plus immédiate est la suivante :

Etant donné un état de contrainte représenté par un tenseur des contraintes, pouvons préciser si le comportement est encore élastique ou si nous avons un comportement plastique ?

En fait il faut être capable de définir, pour tout état de contrainte, la limite élastique.

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons une fonction mathématique f appelée **critère de plasticité** et possédant les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} f(\bar{\sigma}) < 0 & \quad \text{état élastique} \\ f(\bar{\sigma}) = 0 & \quad \text{état plastique} \end{aligned}$$

L'hypothèse d'isotropie du matériau nous permet de dire que le critère doit être indépendant du référentiel. Aussi, afin de simplifier, nous allons nous contenter d'exprimer ce critère dans la base principale des contraintes. Nous pourrions donc écrire le critère sous la forme $f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$.

D'autre part, toujours avec la condition d'isotropie, le critère doit permettre une quelconque permutation de deux des contraintes principales. La fonction f doit être symétrique vis à vis des contraintes principales :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = f(\sigma_{II}, \sigma_I, \sigma_{III}) = f(\sigma_{III}, \sigma_{II}, \sigma_I) = \dots$$

En négligeant l'effet Bauschinger, on peut admettre qu'il y a une équivalence entre la sollicitation de traction et la sollicitation de compression. D'une façon plus générale, nous admettrons qu'il y a une égalité de comportement entre deux états contraintes ayant des valeurs numériques opposées. On doit donc avoir :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = f(-\sigma_I, -\sigma_{II}, -\sigma_{III})$$

Le résultat de l'essai de compression hydrostatique montre que le phénomène de plastification n'est pas modifié par la superposition d'une pression uniforme sur le corps. Ce qui va se traduire par la relation :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = f(\sigma_I + q, \sigma_{II} + q, \sigma_{III} + q)$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

En d'autres termes, le dernier résultat peut être interpréter en disant que deux états contraintes dont les différences entre tenseurs donne un tenseur sphérique sont équivalents. Or nous pouvons systématiquement associé à un tenseur contrainte le tenseur déviateur, la différence entre les deux ne faisant intervenir que la pression hydrostatique :

$$\bar{\sigma} = s + pI \quad \text{avec :} \quad p = -\frac{\text{trace}(\bar{\sigma})}{3} \quad \text{pression hydrostatique}$$

On peut donc dire que le critère doit admettre la même formulation quand il est exprimé à partir du tenseur déviateur :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = f(s_I, s_{II}, s_{III})$$

3-3-2 Critère de Tresca

Basé sur les phénomènes de glissement en mécanique des roches, ce critère fait intervenir comme seul paramètre la contrainte de cission maximale. Le phénomène de plastification apparaît comme des glissements de plans cristallographiques et ces glissements sont favorisés par des contraintes tangentielles élevées.

Pour chaque matériau on peut mettre en évidence une valeur limite de cette valeur de contrainte. On désigne par τ_0 la cission limite. Expérimentalement on constate souvent la relation suivante avec la limite élastique :

$$\sigma_0 = 2\tau_0$$

En conséquence le critère de Tresca se formule de la façon suivante :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \text{Max}(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

Il est facile de vérifier la conformité de ce critère avec les résultats de l'essai de traction. D'autre part, la superposition d'une pression hydrostatique ne change rien.

3-3-3 Critère de Von Misès

Introduit de manière purement phénoménologique, le critère de Von Misès peut recevoir une interprétation physique quand on l'applique à un matériau ayant une élasticité isotrope. On constate en effet que le critère revient à exprimer le fait que la plastification est possible lorsque l'énergie élastique de distorsion (déviatorique) a atteint une certaine valeur.

Ce critère ne met en jeux que le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes. En ce sens il est en accord parfait avec les résultats sur l'essai de compression isotrope.

L'expression de ce critère est fonction des variables choisies.

Ainsi dans un référentiel quelconque, on a :

$$f = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{zx}^2 - 2\sigma_0^2$$

Dans le repère principal des contraintes, on obtient :

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma_0^2$$

Et enfin en fonction des composantes du tenseur déviateur en directions principales :

$$f = s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 - \frac{2}{3}\sigma_0^2$$

On peut facilement vérifier la validité d'un tel critère dans le cas d'une sollicitation de traction.

D'un point de vue comparaison, on constate que le critère de Von Misès est toujours au-delà du critère de Tresca. L'écart maximum enregistrable est de l'ordre de 15%, ce qui reste tout à fait correct vis à vis des résultats expérimentaux. Cet écart est particulièrement visible lors de la représentation dans l'espace des contraintes principales des surfaces décrites par les deux critères. On obtient en effet dans les deux cas un cylindre dont l'axe est la trisectrice du repère. Le cylindre du critère de Von Misès

a une base circulaire circonscrite à la base hexagonale du cylindre de Tresca. En pratique on utilise fréquemment le critère de Von Mises qui présente une forme analytique plus simple que le critère de Tresca.

3-4 LOIS D'ECOULEMENT

Le paragraphe précédent nous a permis de définir un seuil de plastification, mais en aucun cas nous ne pouvons donner des indications sur les états de contraintes et de déformations en cas de plastification. Il convient donc maintenant de préciser les lois de l'écoulement plastique.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, le phénomène étant irréversible, il n'est pas possible de relier de façon univoque le tenseur des contraintes au tenseur des déformations. En effet si une telle relation existait, elle imposerait en particulier que seuls les états final et initial seraient des caractéristiques du phénomène plastique.

En conséquence il faut faire intervenir d'autres paramètres. Le choix de ces paramètres supplémentaires va être conduit par les observations expérimentales.

3-4-1 Loi de Schmid

Un alliage métallique est un agrégat de grains cristallins. La déformation plastique est due à la déformation permanente des grains. En fait cette déformation est surtout associée aux glissements des plans atomiques les uns par rapport aux autres, dans la direction d'une rangée atomique. Ce glissement, qui est la résultante de la propagation de défauts du réseau cristallin (dislocations), obéit à la loi de Schmid :

Le glissement se produit lorsque la projection du vecteur contrainte du plan atomique projetée sur la direction de glissement atteint une valeur critique.

Le glissement du plan P a lieu dans la direction des rangées atomiques donnée par le vecteur \vec{u} de la direction de glissement si $\left(\vec{\sigma} \vec{n} \right) \cdot \vec{u} = \tau_{Max}$. Dans cette égalité, τ_{Max} est une valeur critique en général supposée commune à tous les systèmes de glissement.

La déformation plastique s'effectuant par glissements, elle se fait **sans variation de volume**.

3-4-2 Principe du travail maximal

Supposons que l'on ait N plans atomiques. Un certain nombre d'entre eux ont subi un glissement. Lors d'une déformation plastique, A plans de glissement sont activés c'est à dire que l'on a :

$$\left| \left(\vec{\sigma} \vec{n} \right) \cdot \vec{u} \right| = \tau_p = \tau_{Max} \quad \text{dans une certaine direction de glissement du plan } p \in 1, A$$

On introduit la vitesse de glissement du plan V_p ($// \tau_p$).

$$1 \leq p \leq A \quad \tau_p = \tau_{Max} \quad V_p \neq 0$$

Ainsi on a :

$$A \leq p \leq N \quad \tau_p < \tau_{Max} \quad V_p = 0$$

Considérons maintenant un autre état de contrainte $\vec{\sigma}^*$ tel que pour tout plan atomique on ait :

$$\tau_p^* \leq \tau_{Max}$$

Cet état est dit plastiquement admissible. Comparons les puissances de déformation de ces deux états de contrainte :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{p=1}^N \tau_p V_p = \sum_{p=1}^A \tau_{Max} V_p$$

$$\sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* = \sum_{p=1}^N \tau_p^* V_p^* = \sum_{p=1}^A \tau_p^* V_p^*$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

On a alors :

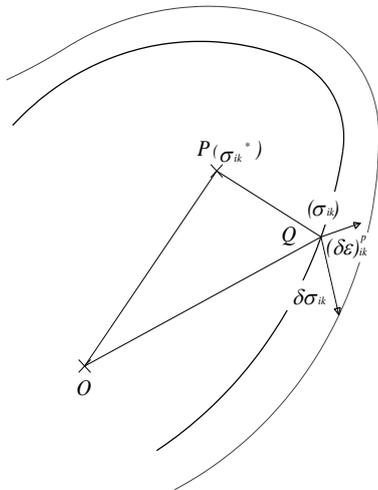
$$\tau_p^* \leq \tau_{Max} \Rightarrow \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} \leq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Ce résultat peut se généraliser sous la forme du **principe du travail plastique maximal** ou **principe de Hill** :

Parmi tous les états de contraintes plastiquement admissibles, l'état de contrainte réel dissipe la plus forte puissance de déformation plastique.

Tous les matériaux n'obéissent pas à ce principe mais les métaux sont effectivement régis par ce principe du fait de leur constitution cristallographique.

Les conséquences de ce principe sont immédiates sur la loi d'écoulement dans le domaine plastique.



Considérons un état de contrainte (point Q) vérifiant le critère de plasticité. On a donc :

$$f(\overline{\sigma}) = 0$$

Soit $\overline{\delta\sigma}$ un accroissement de contrainte qui crée une déformation plastique $\overline{\delta\epsilon}^p$

Considérons maintenant un autre état de contrainte (point P) $\overline{\sigma}^*$, choisi arbitrairement tel que :

$$f(\overline{\sigma}^*) \leq 0$$

En vertu du principe du travail maximal on peut écrire :

$$(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}^*) : \overline{\delta\epsilon}^p \geq 0$$

$$\text{Soit encore : } (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \delta\epsilon_{ij}^p \geq 0$$

Cette équation montre que l'angle que fait $\overline{\delta\epsilon}^p$ avec $\overline{\sigma} - \overline{\sigma}^*$ est obtus (droit au mieux). En d'autres termes, $\overline{\delta\epsilon}^p$ ne peut être dirigé que suivant la perpendiculaire extérieure à la surface représentant le seuil plastique.

L'inconvénient de cette formulation est qu'elle exclut l'adoucissement.

A partir du principe du travail maximal, on peut en déduire la relation suivante, appelée **relation d'écoulement** :

$$\overline{\delta\epsilon}^p = \delta\lambda_p \frac{\partial f(\overline{\sigma})}{\partial \overline{\sigma}} \Rightarrow \delta\epsilon_{ij}^p = \delta\lambda_p \frac{\partial f(\overline{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Cette formule porte aussi le nom de **loi de la normalité**. La fonction de charge joue le rôle d'un potentiel plastique et détermine, à un scalaire multiplicatif positif près, l'écoulement plastique incrémental. La "direction" de l'écoulement plastique est astreinte à être normale à la surface de charge.

Si, comme c'est souvent le cas, on néglige la déformation élastique, on obtient alors une relation pour calculer le tenseur taux de déformation :

$$\dot{\overline{\epsilon}} = \lambda_p \frac{\partial f(\overline{\sigma})}{\partial \overline{\sigma}} \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_p \frac{\partial f(\overline{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Ainsi, si la fonction f est connue, alors le tenseur des taux de déformation $\dot{\overline{\epsilon}}$ est connu à λ_p près.

3-4-3 Loi d'écoulement associée au critère de Tresca

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Cette formulation est relativement complexe car le critère de Tresca se représente avec des points anguleux et il faut distinguer les faces des arêtes.

* faces du critère Par exemple pour la face $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$
 Dans ce cas le critère nous donne :

$$f = (\sigma_I - \sigma_{III}) - \sigma_0 = 0$$

On en déduit alors :

$$\dot{\epsilon}_I = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_I} = \lambda_p$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} = 0 \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon}_I + \dot{\epsilon}_{II} + \dot{\epsilon}_{III} = 0 \quad (\text{incompressibilité})$$

$$\dot{\epsilon}_{III} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{III}} = -\lambda_p$$

* angles du critère Par exemple pour l'angle $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Le critère peut alors prendre deux formes équivalentes qui sont la superposition des deux formes associées aux deux convergentes vers l'arête. On a donc :

$$\dot{\epsilon}_I = \lambda_p + 0$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = 0 + \lambda_p'$$

$$\dot{\epsilon}_{III} = -\lambda_p - \lambda_p'$$

La loi d'incompressibilité est bien vérifiée.

3-4-4 Loi d'écoulement associée au critère de Von Misès

L'expression du critère de Von Misès en contrainte principale est :

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma_0^2$$

On peut donc en déduire :

$$\dot{\epsilon}_I = 2\lambda_p (2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = 2\lambda_p (2\sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_I) \quad (\text{incompressibilité vérifiée})$$

$$\dot{\epsilon}_{III} = 2\lambda_p (2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II})$$

La formule précédente peut être modifiée en introduisant les composantes du tenseur déviateur des contraintes données par : $s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$

On a alors :

$$\dot{\epsilon}_I = 6\lambda_p s_I = \lambda_p' s_I$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = 6\lambda_p s_{II} = \lambda_p' s_{II} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\epsilon} = \lambda_p' \bar{s}$$

$$\dot{\epsilon}_{III} = 6\lambda_p s_{III} = \lambda_p' s_{III}$$

Mais d'autre part, le tenseur déviateur des contraintes vérifie aussi le critère de plasticité :

$$f = s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 - \frac{2}{3}\sigma_0^2 = 0$$

On peut donc écrire :

$$\dot{\epsilon}_I^2 + \dot{\epsilon}_{II}^2 + \dot{\epsilon}_{III}^2 = \frac{2\lambda_p'^2}{3}\sigma_0^2$$

Expression de laquelle nous pouvons sortir la valeur du coefficient λ_p' .

Par ailleurs, nous pouvons calculer **la puissance dissipée par déformation plastique** par unité de volume :

$$\dot{W} = \sigma : \dot{\epsilon} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Cette puissance nous permet d'établir une équivalence entre notre sollicitation et une sollicitation de traction dans le domaine plastique :

$$\dot{W} = \sigma_0 \dot{\epsilon}$$

On peut donc introduire **la vitesse de déformation équivalente** :

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_I^2 + \dot{\epsilon}_{II}^2 + \dot{\epsilon}_{III}^2)}$$

Ces dernières relations nous permettent de donner une forme importante de la loi d'écoulement

$$s = \frac{2\sigma_0}{3\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon}$$

Ainsi, avec le critère de Von Misès, la loi d'écoulement se traduit par une proportionnalité entre le tenseur déviateur des contraintes et le tenseur des taux de déformation.

Dans le cas d'un état plan de déformation, on montre que le critère de Von Misès prend la forme :

$$\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 - \frac{1}{3}\sigma_0^2 = 0$$

Ce qui nous donne dans les directions principales :

$$\frac{1}{4}(\sigma_I - \sigma_{II})^2 - \frac{1}{3}\sigma_0^2 = 0$$

4- RHEOLOGIE

La rhéologie est l'étude de la déformation de la matière. Son objectif principal est l'étude générale des milieux continus entre les liquides visqueux et les solides indéformables. Pour ce qui nous concerne, nous étudierons principalement la rhéologie des métaux et les différents critères de classement. Nous commencerons par présenter les caractéristiques rhéologiques des métaux et leur influence sur la mise en forme. Ensuite, nous donnerons un aperçu des lois rhéologiques les plus utilisées en mise en forme.

4-1 Caractéristiques rhéologiques des métaux

L'essentiel de ces caractéristiques est obtenu à partir des résultats de l'essai de traction. Dans le cas général, la résistance à la déformation plastique est fonction de la vitesse de déformation. Cependant, dans le cas des glissements inter cristallins, la résistance est peu dépendante de la vitesse (sauf aux très grandes vitesses).

Dans de nombreuses études on considère que le comportement est parfaitement plastique. Il convient d'examiner de plus près les différentes causes d'écart par rapport à ce modèle parfait.

4-1-1 Influence de l'érouissage

En règle générale, la limite d'écoulement augmente avec la déformation. C'est le phénomène d'érouissage ou de durcissement. En fait le terme d'érouissage représente l'ensemble des modifications subies par les propriétés mécaniques du matériau à la suite de déformations plastiques.

La matière peut devenir anisotrope. C'est le phénomène d'érouissage anisotrope. Les grandes déformations permanentes engendrent un effet d'orientation des grains cristallins. Un polycristal dont les grains étaient initialement orientés au hasard, créant ainsi l'isotropie du matériau, voit ceux-ci s'orienter suivant les efforts imposés. L'exemple le plus concret est le laminage des tôles.

Dans ces conditions, on constate que la contrainte d'écoulement d'une éprouvette de traction est fonction de la direction de prélèvement dans le matériau. Dans les faits, les essais normalisés de réception d'une tôle imposent de faire des prélèvements aussi bien dans le sens long que dans le sens transverse.

Ceci nous conduira par la suite à une modélisation du comportement anisotrope plastique.

Le phénomène d'érouissage englobe aussi la dissymétrie parfois constatée dans des essais de traction et de compression. En général, le comportement en compression est voisin du comportement en traction mais pour certains matériaux (dont la fonte par exemple), la limite élastique présente des valeurs différentes. On parle alors d'érouissage cinématique.

Pour permettre l'érouissage constaté expérimentalement, en conservant une surface seuil de laquelle le point représentatif ne peut pas sortir, des mécanismes de déplacement ou de déformation ont été envisagés: la fonction seuil est paramétrée par l'introduction de variables d'érouissage.

4-1-2 Influence de l'élasticité

Bien souvent en mise en forme des métaux, on néglige l'élasticité. On remarque en effet que les déformations élastiques sont très petites devant les déformations plastiques mises en jeu. Toutefois, dans certaines applications, cette approximation peut être abusive.

Par exemple dans le cas d'un laminage à froid d'une tôle, on calcule souvent l'effort de laminage à partir de la formule suivante :

$$F = \int_S \sigma_{yy} ds$$

On fait ainsi apparaître la notion de colline de frottement. La force de laminage n'est rien d'autre que l'aire sous la colline de frottement. Cette surface peut être assez fortement modifiée suivant que l'on prenne en compte un comportement avec ou sans l'élasticité. L'écart peut être de l'ordre de 10 à 15%. Cet écart s'explique par le phénomène de retour élastique.

4-1-3 Influence de la température

L'essai de traction est très incomplet du point de vue thermique. Pratiquement on considère que l'éprouvette est en évolution isotherme et que l'essai a lieu à température constante.

Dans la réalité, le second principe de la thermodynamique nous montre que l'irréversibilité du processus de plastification se traduit par un transfert thermique. Un forgeron est capable de "réchauffer" une pièce sous l'action répétée de son marteau (éventuellement pilon).

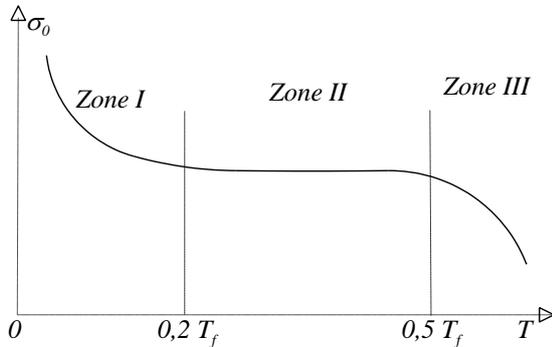
Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

D'autre part, il faut remarquer que bon nombre de processus de mise en forme se font à température élevée.

Il est donc important de ne pas négliger les effets thermiques.

Domaines thermiques de la mise en forme



Si on considère la variation de la contrainte d'écoulement en fonction de la température, on obtient un diagramme ayant l'allure ci contre.

Dans ce diagramme T_f représente la température de fusion du métal, exprimée en Kelvin.

On constate alors trois zones d'évolution.

Les zones I et III sont définies par : $T < 0,2 T_f$
et $T > 0,5 T_f$

C'est le domaine de déformation thermiquement activé :

- * La contrainte d'écoulement est fonction de la déformation et de la température
- * La contrainte d'écoulement décroît quand la température augmente.

La zone centrale II est définies par : $0,2 T_f < T < 0,5 T_f$

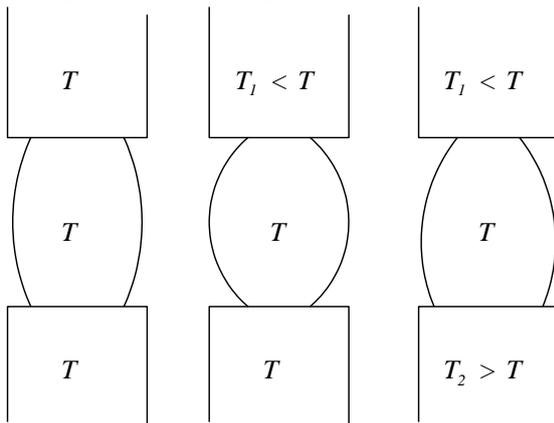
C'est le domaine de déformation athermique :

- * La contrainte d'écoulement décroît très légèrement en fonction de la température.

La mise en forme des métaux ne se fait pas aux très basses températures. En effet, d'une part c'est dans cette zone que la contrainte d'écoulement est la plus élevée, d'autre part la faible température favorise la fragilité du matériau. Par contre le diagramme précédent montre bien l'intérêt d'une transformation à chaud.

Les effets de la thermique

Ces effets sont multiples. On constate en général une augmentation du coefficient de frottement avec la température. Ceci engendre des phénomènes de dégradation du lubrifiant et de grippage.



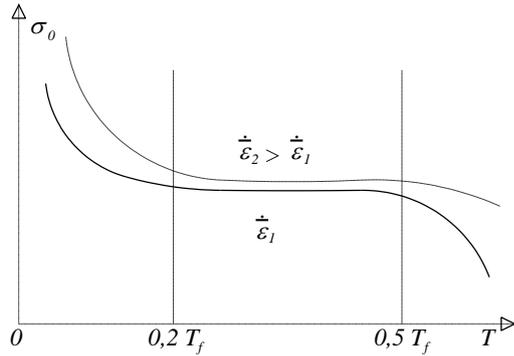
Le contact pièce-outil favorisant les transferts thermiques, on note un échauffement des outils et un refroidissement de la pièce. La dissipation thermique au contact des outils froids provoque une température hétérogène dans le matériau et peut donc modifier l'écoulement. Ces phénomènes se traduisent plus ou moins directement par une dispersion des cotes sur la pièce réalisée. Il convient donc de pouvoir les modéliser correctement pour les intégrer dans un calcul de dimensionnement d'outils.

L'échauffement par déformation plastique se traduit par un adoucissement du matériau, mais cette modification est très faible.

4-1-4 Influence de la vitesse de déformation

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité



Il est à noter qu'une augmentation de la vitesse de déformation se traduit toujours par une augmentation de la contrainte d'écoulement.

En fait, à froid, l'influence est très peu sensible et la contrainte d'écoulement est simplement fixée par le processus d'écrouissage. Toutefois ce résultat doit être modulé aux grandes vitesses de déformation ($\dot{\epsilon} > 10s^{-1}$), car dans ce cas on constate une dépendance de σ_0 vis à vis de $\dot{\epsilon}$.

A chaud, la vitesse de déformation joue un rôle important. Cela se traduit par l'introduction d'un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation dans la loi de comportement. On obtient ainsi de loi de type viscoplastique (par exemple Norton Hoff).

4-1-5 Conclusions

Ainsi que nous venons de le voir, il y a de nombreux paramètres qui peuvent avoir une incidence plus ou moins grande sur le comportement du matériau.

Dans la pratique, on utilise soit un procédé de mise en forme à froid (température ambiante), soit un procédé à chaud (élévation de la température de la pièce).

Les informations acquises par l'expérience et concernant l'influence des paramètres dans ces deux plages d'utilisation sont résumées dans le tableau suivant :

	A FROID	A CHAUD
THERMIQUE	rarement nécessaire	souvent important
ELASTICITE	important pour les outils et le produit	peu important
ECROUISSAGE	important	dépend du domaine de déformation
VITESSE DE DEFORMATION	négligeable aux faibles valeurs important pour les fortes valeurs	toujours importante

Il suffit donc de superposer ces propriétés au modèle de plasticité fondamental afin de décrire la rhéologie du matériau. Ainsi en mise en forme à froid, nous prendrons une loi de comportement élastoplastique écrouissable, alors qu'en mise en forme à chaud, nous utiliserons plutôt des lois viscoplastiques et parfois élasto-viscoplastique.

4-2 Modélisation de la rhéologie

Il nous reste maintenant à traduire mathématiquement ces différentes lois afin de bien prendre en compte les aspects phénoménologiques. A priori, ces équations rhéologiques peuvent être très complexes, mais nous utiliserons au mieux les résultats précédents pour simplifier les approches.

4-2-1 Prise en compte de l'écrouissage

D'une façon générale, l'écrouissage (aptitude des matériaux à se durcir à mesure qu'on les déforme) est introduit directement dans le critère de plasticité sous forme d'un ensemble de paramètres internes t repérant les états successifs du matériau. Le critère s'écrit alors :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$f(\bar{\sigma}, t) = 0$$

Le choix des paramètres est fonction du type d'érouissage.

Erouissage isotrope

L'érouissage isotrope doit être regardé comme une évolution du critère de plasticité provoquée par la déformation plastique qui tend à augmenter le domaine des contraintes tel que le critère soit toujours respecté. Afin de respecter l'isotropie, le paramètre d'érouissage est un scalaire.

Dans la pratique, on prend souvent la déformation généralisée plastique définie à partir du taux de déformation équivalent

$$\bar{\varepsilon}^{pl}(M, t) = \int_{t_0}^t \dot{\bar{\varepsilon}}(M, \tau) d\tau$$

La notion d'érouissage isotrope modifie donc la surface de charge d'un matériau d'une façon isotrope. Ainsi dans le cas du cylindre à base circulaire du critère de Von Misès, l'érouissage isotrope va simplement changer le rayon du cylindre.

Erouissage anisotrope et érouissage cinématique

Dans le cas de l'érouissage anisotrope, le critère se déforme plus dans la direction de sollicitation. Pour l'érouissage cinématique, l'effet Bauschinger se traduit par un durcissement dans la direction de déformation et un adoucissement dans la direction opposée.

Pour ces deux cas d'érouissage, on introduit dans le critère de plasticité des lois avec décalage du genre :

$$f(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}) = 0$$

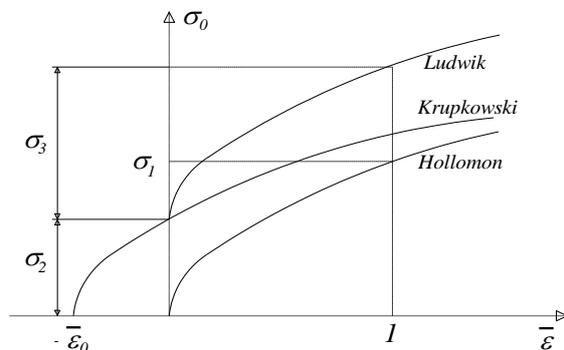
Bien entendu, la difficulté principale réside dans la détermination du tenseur $\bar{\alpha}$.

La courbe d'érouissage (courbe σ_0 en fonction de $\bar{\varepsilon}^{pl}$) est définie en général par des essais à froid, car l'érouissage joue un rôle important en mise en forme à froid. Il est de plus très sensible aux vitesses de déformation faibles ou moyennes ($\dot{\bar{\varepsilon}} < 10s^{-1}$).

Pour caractériser l'érouissage, on utilise n le **coefficient d'érouissage** déterminé par la formule suivante :

$$n = \frac{\partial \text{Log}(\sigma_0)}{\partial \text{Log}(\bar{\varepsilon}^{pl})}$$

Trois modèles sont souvent utilisés.



Loi de Hollomon ou loi puissance

$$\sigma_0 = \sigma_1 (\bar{\varepsilon}^{pl})^n$$

σ_1 Contrainte d'écoulement pour une déformation plastique égale à l'unité.

n Coefficient d'érouissage supposé constant.

Loi de Ludwik

$$\sigma_0 = \sigma_2 + \sigma_3 (\bar{\varepsilon}^{pl})^n$$

σ_2 Contrainte d'écoulement pour une déformation plastique nulle (σ_e)

σ_3 Valeur de $\sigma_0 - \sigma_2$ pour une déformation plastique unité

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

n' Constante caractérisant l'écouissage ($\neq n$)

Loi de Krupkowski

$$\sigma_0 = \sigma_4 (\bar{\varepsilon}^{pl} + \bar{\varepsilon}_0)^{n''}$$

$\bar{\varepsilon}_0, \sigma_4$ Constantes telles que pour $\bar{\varepsilon}^{pl} = 1 - \bar{\varepsilon}_0, \sigma_0 = \sigma_4$

n'' Constante caractérisant l'écouissage

C'est à priori cette dernière loi qui est le plus en accord avec les résultats expérimentaux.

4-2-2 Prise en compte de l'anisotropie

Ainsi que nous l'avons dit, l'anisotropie, si elle n'est pas déjà présente à l'état initial du matériau, peut très bien apparaître à la suite de la transformation. Par exemple dans les produits obtenus par laminage ou filage, les directions de laminage ou de filage constituent des axes privilégiés. Dans de nombreux cas, l'hypothèse d'isotropie n'est plus justifiée.

Pour rendre compte de ces phénomènes, nous allons utiliser la **théorie de Hill**.

Bien que l'anisotropie puisse concerner toutes les propriétés, nous limiterons notre étude à l'anisotropie des propriétés plastiques du matériau. Nous négligerons la déformation élastique. D'autre part, nous supposerons que notre matériau à un comportement rigide plastique, c'est à dire sans écouissage.

La théorie de Hill ne peut s'appliquer qu'à des états d'anisotropie admettant en tout point trois plans de symétrie deux à deux orthogonaux. C'est le cas d'une tôle laminée.

Les intersections deux à deux de ces plans seront appelés axes principaux d'anisotropie. Ils seront pris comme axes de référence.

Critère de Hill

La forme de ce critère (couramment utilisé sur les matériaux anisotropes tels que les résines fibrées) est justifiée par les mêmes considérations physiques et mathématiques que celles du critère de Von Misès (indépendance vis à vis de la pression hydrostatique, pas d'effet Bauschinger, symétrie).

Dans le repère principal d'anisotropie, ce critère se présente sous une forme quadratique symétrique des composantes du tenseur des contraintes :

$$F(\sigma_{YY} - \sigma_{ZZ})^2 + G(\sigma_{ZZ} - \sigma_{XX})^2 + H(\sigma_{XX} - \sigma_{YY})^2 + 2L\sigma_{YZ}^2 + 2M\sigma_{ZX}^2 + 2N\sigma_{XY}^2 = 1$$

Dans cette expression, F, G, H, L, M et N sont les coefficients d'anisotropie.

Dans le cas particulier où le problème présente une symétrie de révolution autour de deux des trois axes principaux d'anisotropie, on retrouve le critère de Von Misès.

La détermination des coefficients d'anisotropie se fait à l'aide de trois essais de traction suivant les trois axes d'anisotropie $[(O; \vec{E}_X), (O; \vec{E}_Y), (O; \vec{E}_Z)]$ et de trois essais de cisaillement simple dans les trois plans d'anisotropie. Cela peut présenter de nombreuses difficultés car ces paramètres dépendent à priori de la déformation subie, ainsi que de la vitesse de déformation.

Les résultats de ces essais sont contenus dans les formules suivantes :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\left. \begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sigma_{0XX}^2} + \frac{1}{\sigma_{0YY}^2} + \frac{1}{\sigma_{0ZZ}^2} \right) \\
 G &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sigma_{0YY}^2} + \frac{1}{\sigma_{0ZZ}^2} + \frac{1}{\sigma_{0XX}^2} \right) \\
 H &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sigma_{0ZZ}^2} + \frac{1}{\sigma_{0XX}^2} + \frac{1}{\sigma_{0YY}^2} \right) \\
 L &= \frac{1}{2\sigma_{0YZ}^2} \\
 M &= \frac{1}{2\sigma_{0ZX}^2} \\
 N &= \frac{1}{2\sigma_{0XY}^2}
 \end{aligned} \right\} \text{avec} \begin{cases}
 \sigma_{0XX} & \text{Contrainte d'écoulement en traction uniaxiale suivant l'axe } (\mathbf{O}; \vec{E}_x) \\
 \sigma_{0YY} & \text{Contrainte d'écoulement en traction uniaxiale suivant l'axe } (\mathbf{O}; \vec{E}_y) \\
 \sigma_{0ZZ} & \text{Contrainte d'écoulement en traction uniaxiale suivant l'axe } (\mathbf{O}; \vec{E}_z) \\
 \sigma_{0YZ} & \text{Contrainte d'écoulement en cisaillement dans le plan } (\mathbf{O}; \vec{E}_y, \vec{E}_z) \\
 \sigma_{0ZX} & \text{Contrainte d'écoulement en cisaillement dans le plan } (\mathbf{O}; \vec{E}_z, \vec{E}_x) \\
 \sigma_{0XY} & \text{Contrainte d'écoulement en cisaillement dans le plan } (\mathbf{O}; \vec{E}_x, \vec{E}_y)
 \end{cases}$$

Loi d'écoulement associée

Comme dans le cas d'un matériau isotrope (Critère de Von Mises), la loi d'écoulement se déduit du principe du travail plastique maximal :

$$\dot{\varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda_p \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \sigma_{ij}}$$

On obtient donc les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{XX} &= 2\lambda_p [G(\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ}) + H(\sigma_{XX} - \sigma_{YY})] \\
 \dot{\varepsilon}_{YY} &= 2\lambda_p [H(\sigma_{YY} - \sigma_{XX}) + F(\sigma_{YY} - \sigma_{ZZ})] \\
 \dot{\varepsilon}_{ZZ} &= 2\lambda_p [F(\sigma_{ZZ} - \sigma_{YY}) + G(\sigma_{ZZ} - \sigma_{XX})]
 \end{aligned} \right\} \text{et} \begin{cases}
 \dot{\varepsilon}_{XY} = 2\lambda_p L \sigma_{XY} \\
 \dot{\varepsilon}_{YZ} = 2\lambda_p M \sigma_{YZ} \\
 \dot{\varepsilon}_{ZX} = 2\lambda_p N \sigma_{ZX}
 \end{cases}$$

Bien entendu la relation d'incompressibilité est vérifiée.

Cas des contraintes planes

Ce cas correspondant à la théorie des coques minces peut être utilisé pour traiter certains problèmes de tôles de faible épaisseur laminées.

Le repère associé à la tôle est le suivant :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{O}; \vec{E}_x) & \text{ est l'axe correspondant à la direction de laminage} \\
 (\mathbf{O}; \vec{E}_y) & \text{ est l'axe correspondant à la direction transverse} \\
 (\mathbf{O}; \vec{E}_z) & \text{ est l'axe normal à la tôle}
 \end{aligned}$$

On effectue un test de traction dans une direction $(\mathbf{O}; \vec{E}_x)$ faisant un angle α avec la direction principale d'anisotropie $(\mathbf{O}; \vec{E}_x)$. On définit alors le coefficient d'anisotropie r comme étant le rapport entre la vitesse de diminution de largeur et la vitesse d'amincissement de l'éprouvette de traction. Ce coefficient est directement accessible par l'expérience et va permettre de diminuer le nombre de coefficients d'anisotropie inconnus.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

On a :

$$r = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{\dot{\epsilon}_{zz}} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha}$$

En général, on ne s'intéresse qu'à la valeur moyenne de r , appelée **coefficient de Lankford**. On a ainsi une bonne idée du degré d'anisotropie de la tôle, du moins si les fluctuations de $r(\alpha)$ ne sont pas trop fortes.

Classiquement, on détermine r pour trois valeurs particulières de l'angle α . On se donne :

$$r(\alpha=0^\circ) = R = \frac{H}{G} \quad ; \quad r(\alpha=45^\circ) = T = \frac{2N - F - G}{2(F + G)} \quad ; \quad r(\alpha=90^\circ) = P = \frac{H}{F}$$

Le critère de Hill peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{H}{RP} \left[(R+1)P\sigma_{xx}^2 + R(P+1)\sigma_{yy}^2 - 2RP\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (2T+1)(R+P)\sigma_{xy}^2 \right] = 1$$

Il nous reste encore un coefficient à déterminer. Classiquement, on choisit de faire un essai de traction selon l'axe $(O; \vec{E}_x)$. Le critère nous donne alors :

$$H = \frac{R}{R+1} \frac{1}{\sigma_{0xx}^2}$$

Cas de l'anisotropie normale

C'est la cas particulier où l'axe normal à la tôle est un axe de symétrie de révolution, c'est à dire lorsque le plan de la tôle est isotrope.

Le coefficient de Lankford est alors constant et le critère de Hill se réduit à :

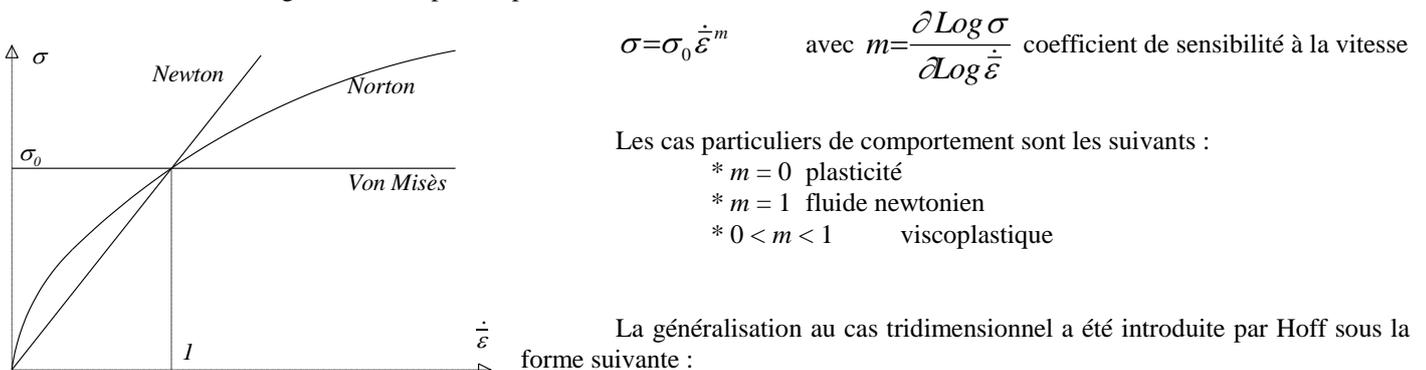
$$\frac{H}{r} \left[(r+1)(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) - 2r\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2(2r+1)\sigma_{xy}^2 \right] = 1$$

Le coefficient H est déterminé par un essai de traction simple :

$$H = \frac{r}{r+1} \frac{1}{\sigma_0^2}$$

4-2-3 Modélisation du comportement viscoplastique

A chaud, la vitesse de déformation joue un rôle prépondérant. Il est donc naturel de postuler une loi de déformation dépendant de $\dot{\epsilon}$. La loi la plus utilisée est la **loi de Norton Hoff**. Cette loi a d'abord été introduite par Norton sur une approche unidimensionnelle du fluage. Elle est exprimée par la relation :



$$\bar{s} = 2K \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}} \right)^{(m-1)} \bar{\epsilon} \quad \text{avec } K \text{ consistance du matériau.}$$

La contrainte d'écoulement équivalente σ_0 nous est donnée par la relation :

$$\sigma_0 = \sqrt{3} K \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}} \right)^m$$

Le paramètre K consistance peut être fonction de $\bar{\epsilon}$ et de la température T . Il est généralement déterminé par des essais unidirectionnels (traction, torsion).

4-2-4 Modélisation du comportement élasto-viscoplastique

On se contente de séparer le comportement élastique du comportement viscoplastique :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\bar{\epsilon}}^{el} + \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}$$

La partie élastique vérifie la loi de Hooke que l'on peut écrire en vitesse :

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2\mu \dot{\bar{\epsilon}}^{el} + \lambda \text{Trace} \left(\dot{\bar{\epsilon}} \right) \mathbf{I}$$

La partie viscoplastique est liée au tenseur déviateur des contraintes par la loi de Norton Hoff.

LES METHODES VARIATIONNELLES

1- DIFFERENTES FORMULATIONS

1-1 Introduction

L'analyse d'un phénomène physique conduit souvent à une représentation mathématique sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Les conditions aux limites ou et initiales viennent compléter ce système afin de permettre de déterminer les constantes d'intégrations.

Hélas, la résolution d'un tel système n'est analytiquement possible que dans certains cas très simples. Souvent on est incapable d'explicitier la solution réelle. On peut parfois obtenir une solution analytique approchée en formulant des hypothèses simplificatrices associées par exemple à la géométrie (condition de symétrie, théorie des poutres, théorie des plaques ...) mais à nouveau nous ne pouvons donner des solutions que dans certains cas. Dans un cas plus général il convient alors de rechercher une solution approchée numérique.

La résolution numérique directe de ces équations est possible grâce à l'ordinateur. On peut par exemple, remplacer la notion de différentielle par la différence des valeurs de la fonction prise pour des valeur des variables très petites. On est ainsi conduit à une méthode de type **différences finies**. Cette méthode, intuitive, donne de bons résultats mais les temps de calculs peuvent être très élevés. De plus ce genre de calculs itératifs présente l'inconvénient de cumuler facilement les erreurs d'arrondis et d'approximation et le résultat final peut s'en ressentir.

Une autre approche consiste à établir une équivalence entre notre problème différentiel et une forme intégrale. On peut en effet associer des équations globales à une formulation locale. Ces équations sont sous forme intégrale, c'est à dire qu'elles sont constituées de sommes d'intégrales sur le domaine et éventuellement sur sa frontière. La condition reviendra alors à rechercher parmi l'ensemble des solutions possible celle qui minimisera une certaine fonctionnelle. Ainsi la résolution de notre problème différentiel se ramène à une recherche de minimum.

La **méthode des éléments finis** consiste alors à restreindre l'ensemble des champs à un sous-espace engendré par un nombre fini de champs de base et à trouver l'élément de ce sous-espace qui minimise la fonctionnelle. Le minimum ainsi obtenu est le minimum dans le sous-espace engendré, mais il n'est généralement pas le minimum absolu. Le champ ainsi déterminé n'est par conséquent qu'une approximation du champ réel. Cette approximation sera d'autant meilleure que le sous-espace sera vaste, mais les temps de calculs (et donc le coût de l'étude) augmenteront. Il est plus judicieux de bien choisir le sous-espace et le mode de formulation du sous-espace.

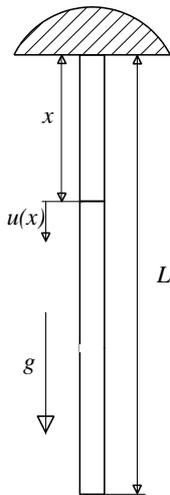
Dans l'application de la méthode, il convient de bien dissocier la notion de sous-espace des solutions (approximation de la fonction) de la notion de maillage (approximation du domaine).

1-2 Exemple

Afin de bien fixer cette idée nous regarder sur un exemple comment le choix du sous-espace peut être important.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité



On considère une poutre de section constante S et de longueur L suspendue par une de ses extrémités. On se propose de calculer la variation de longueur de la poutre associée à l'action de la pesanteur. On suppose que le comportement reste dans un domaine élastique linéaire et que l'on connaît le module d'Young E du matériau. D'autre part, l'attraction gravitationnelle est caractérisée par la valeur g de la pesanteur. Enfin on désigne par ρ la masse volumique du matériau.

La solution analytique de ce problème existe. La variable x étant la position d'une section courante de la poutre par rapport à l'extrémité de liaison, le déplacement vertical de cette section est donné par :

$$u(x) = \frac{\rho g}{2E} x(2L - x)$$

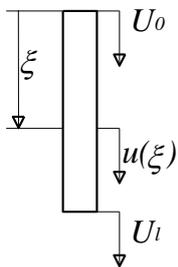
Le déplacement de l'extrémité libre est donc :

$$u(L) = \frac{\rho g}{2E} L^2$$

Nous allons maintenant examiner des solutions par la méthode des éléments finis. Pour cela nous devons discrétiser l'espace, c'est à dire découper la poutre en plusieurs éléments. Pour une discrétisation donnée, le choix de la fonction d'approximation présente une réelle importance.

1-2-1 Approximation du déplacement par une fonction linéaire.

On utilise des éléments pour lesquels le déplacement est une fonction linéaire. Cette fonction étant caractérisée par deux constantes, un élément de type isoparamétrique sera donné par deux noeuds.



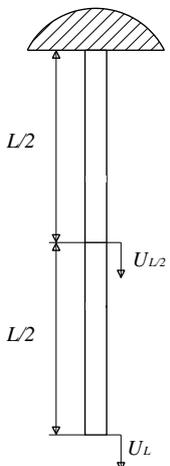
Si on désigne par ξ la variable permettant de décrire l'élément et par l la longueur du tronçon, on a :

$$u(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{l-\xi}{l} & \frac{\xi}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

L'énergie de déformation est alors :
$$W_{def} = \frac{1}{2} \frac{SE}{l} (U_0, U_1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

D'autre part le travail des forces de pesanteur est :
$$W_{gra} = \frac{\rho g S l}{2} (U_0, U_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assemblage avec deux éléments



Dans le cas d'un assemblage de deux éléments ($l=L/2$), les conditions d'assemblage nous donnent :

$$\frac{SE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{L/2} \\ U_L \end{pmatrix} = \frac{\rho g S l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 \\ F_{L/2} \\ F_L \end{pmatrix}$$

Dans cette expression, le dernier vecteur représente les forces appliquées par l'extérieur aux noeuds d'assemblage.

Les conditions aux limites imposent :

$$U_0 = 0 ; F_{L/2} = 0 ; F_L = 0$$

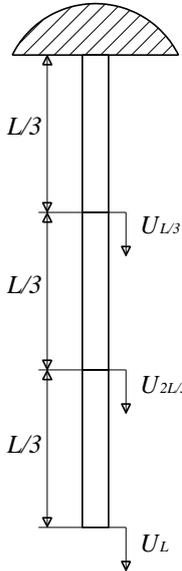
La résolution du système précédent nous permet d'obtenir :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$U_{L/2} = \frac{3\rho g L^2}{8E}; U_L = \frac{\rho g L^2}{2E}; F_0 = -\rho g S E$$

Assemblage avec trois éléments



Dans ce cas les conditions nous donnent :

$$\frac{SE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{L/3} \\ U_{2L/3} \\ U_L \end{pmatrix} = \frac{\rho g S l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 \\ F_{L/3} \\ F_{2L/3} \\ F_L \end{pmatrix} \quad \text{avec } l=L/3$$

Les conditions aux limites imposent :

$$U_0 = 0; F_{L/3} = 0; F_{2L/3} = 0; F_L = 0$$

La résolution du système précédent nous permet d'obtenir :

$$U_{L/3} = \frac{5\rho g L^2}{18E}; U_{2L/3} = \frac{8\rho g L^2}{18E} = \frac{4\rho g L^2}{9E}; U_L = \frac{9\rho g L^2}{18E} = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

$$F_0 = -\rho g S E$$

1-2-2 Approximation du déplacement par une fonction quadratique

La fonction d'interpolation choisie est du second degré. Caractérisée par trois constantes, un élément de type isoparamétrique sera donné par trois noeuds. On a alors :

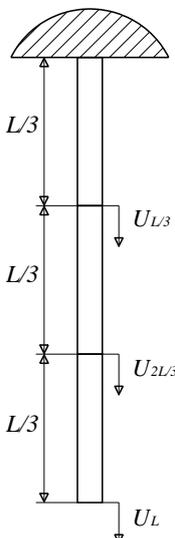
$$u(\xi) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\xi}{l} + \frac{2\xi^2}{l^2}, \frac{4\xi}{l} - \frac{4\xi^2}{l^2}, \frac{\xi}{l} + \frac{2\xi^2}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{l/2} \\ U_l \end{pmatrix}$$

L'énergie de déformation est :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \frac{SE}{3l} (U_0, U_{l/2}, U_l) \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{l/2} \\ U_l \end{pmatrix}$$

Pour le travail des forces de pesanteur, on a :

$$W_{gra} = \frac{\rho g S l}{6} (U_0, U_{l/2}, U_l) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Assemblage avec un élément

Dans ce cas ($l=L$), les conditions d'assemblage nous donnent :

$$\frac{SE}{3l} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{L/2} \\ U_L \end{pmatrix} = \frac{\rho g S l}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 \\ F_{L/2} \\ F_L \end{pmatrix}$$

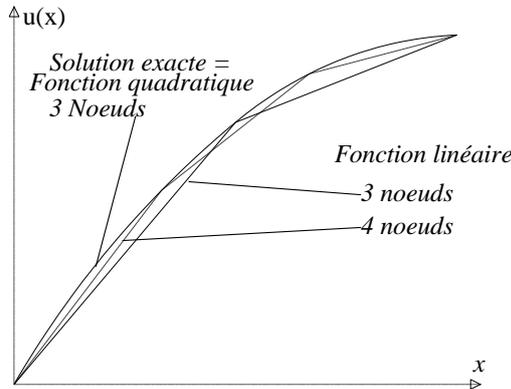
Avec les conditions aux limites :

$$U_0 = 0; F_{L/2} = 0; F_L = 0$$

Nous obtenons :

$$U_{L/2} = \frac{3\rho g L^2}{8E}; U_L = \frac{\rho g L^2}{2E}; F_0 = -\rho g S E$$

1-2-3 Conclusions



On constate que dans les trois cas, le déplacement d'extrémité calculé est le même et que l'on obtient la valeur exacte.

Par contre, on remarque, en comparant les fonctions déplacements, que dans le cas d'un assemblage utilisant des éléments linéaires, on ne peut qu'approcher la solution. La convergence va se faire avec le nombre d'éléments.

Dans le cas de l'utilisation d'éléments quadratiques, un seul élément apporte la solution. La convergence est instantanée.

On constate bien dans cet exemple que le choix du sous-espace vectoriel des fonctions est extrêmement important. En particulier, si le sous-espace vectoriel retenu contient la solution exacte, la méthode des éléments finis nous donnera alors cette solution.

2- FORMULATION INTEGRALE D'UN PROBLEME

Avant de donner la formulation globale de notre problème de mécanique des milieux continus, nous allons définir certaines entités mathématiques.

2-1 Définitions

2-1-1 Opérateurs

On considère un espace vectoriel de champs scalaires ou vectoriels définis sur un domaine matériel (D).

On appelle **opérateur** toute application de cet espace dans un espace vectoriel image dont les éléments sont des champs scalaires ou vectoriels définis sur le même domaine matériel (D).

Partant de cette définition, on constate que l'application qui, à un champ vectoriel de déplacement $\vec{u}(M)$ défini sur le domaine matériel (D), associe le champ vectoriel de composantes $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right]$ est un opérateur.

$$\vec{u}(M) \xrightarrow{A} A(\vec{u}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] \vec{E}_i$$

Remarques :

- * Cet opérateur nécessite un champ de déplacement deux fois continûment dérivable.
- * Avec cet opérateur, en petites déformations, l'équation locale de l'équilibre devient :

$$A(\vec{u}) = \vec{f} - \rho \vec{\gamma}$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Un opérateur Q d'espace de définition E_Q sera dit **linéaire** si et seulement si :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E_Q^2 \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a } Q(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda Q(\vec{u}) + \mu Q(\vec{v})$$

L'opérateur dérivation étant un opérateur linéaire, on constate aisément que l'opérateur A est linéaire.

2-1-2 Fonctionnelle

Une **fonctionnelle** est un opérateur dont l'espace image est égal à l'espace des champs scalaires constants.

Dans le cas de la mécanique linéaire des milieux continus, on pourra introduire la fonctionnelle suivante :

$$\vec{u}(M) \xrightarrow{W} W(\vec{u}) = \int_D \vec{\sigma} : \varepsilon dv = \frac{1}{4} \int_D K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dv$$

2-1-3 Produit scalaire

Afin de poursuivre, il faut associer une métrique aux espaces utilisés, c'est à dire introduire une loi de composition appelée **produit scalaire**.

Champ scalaire L'espace des champs scalaires définis sur D est muni du produit scalaire suivant :

$$(x / y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \int_D xy dv$$

La norme associée à ce produit scalaire est :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_D x^2 dv}$$

Champ vectoriel L'espace des champs vectoriels définis sur D est muni du produit scalaire suivant :

$$(\vec{u} / \vec{v}) \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_D \vec{u} \cdot \vec{v} dv$$

La norme associée à ce produit scalaire est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\int_D \vec{u}^2 dv}$$

2-1-4 Opérateur symétrique

L'opérateur Q est dit **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E_Q^2 \langle Q(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, Q(\vec{v}) \rangle$$

Considérons l'opérateur A précédemment défini et désignons par B sa restriction l'ensemble des champs vectoriels deux fois continûment dérivables et nuls sur la frontière.

Nous allons vérifier que l'opérateur ainsi défini est bien un opérateur symétrique.

On a :

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = -\frac{1}{2} \int_D v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] dv$$

Soit en utilisant la formule d'intégration par partie :

$$\int_D f \frac{\partial g}{\partial x_i} dv = - \int_D g \frac{\partial f}{\partial x_i} dv + \int_{\partial D} f g n_i ds$$

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] dv - \frac{1}{2} \int_{\partial D} v_i \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] n_j ds$$

Mais sur la frontière du domaine, le vecteur \vec{v} est nul. On a donc :

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] dv = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} K_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u dv$$

Avec :

$$\varepsilon_{kl}^u = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

De même on peut définir :

$$\varepsilon_{kl}^v = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

On a donc :

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} K_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u dv = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial v_j}{\partial x_i} K_{jikl} \varepsilon_{kl}^u dv$$

Mais de plus :

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ji} = K_{jikl} \varepsilon_{kl} \Rightarrow K_{ijkl} = K_{jikl}$$

Ce qui nous donne :

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) K_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u dv$$

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \int_D K_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u \varepsilon_{ij}^v dv$$

Mais comme le tenseur d'élasticité est symétrique ($K_{ijkl} = K_{klij}$):

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \int_D K_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u \varepsilon_{ij}^v dv = \int_D K_{klij} \varepsilon_{kl}^u \varepsilon_{ij}^v dv = \int_D K_{ijkl} \varepsilon_{ij}^u \varepsilon_{kl}^v dv$$

Cette dernière relation montre bien que l'opérateur B est symétrique :

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, B(\vec{v}) \rangle$$

2-1-5 Opérateur défini positif

Un opérateur Q est **défini positif** si et seulement si :

$$\forall \vec{u} \in E_Q \text{ avec } \vec{u} \neq \vec{0} \quad \langle Q(\vec{u}), \vec{u} \rangle > 0$$

L'opérateur B précédent est défini positif car le produit scalaire formé représente l'énergie de déformation du domaine qui est positive ou qui ne peut s'annuler que si le champ de déplacement est nul.

Un opérateur Q est **borné inférieurement** si et seulement si :

$$\forall \vec{u} \in E_Q \text{ avec } \vec{u} \neq \vec{0} \quad \langle Q(\vec{u}), \vec{u} \rangle \geq k \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

2-2 Théorème du minimum

2-2-1 Enoncé

Soient : Q un opérateur linéaire symétrique défini positif

E_Q l'espace de définition de Q

\vec{q} un champ scalaire ou vectoriel, de norme finie appartenant à l'espace vectoriel

qui contient E_Q et l'espace image de Q

ψ une fonctionnelle définie par :

$$\forall \vec{u} \in E_Q \quad \psi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \langle Q(\vec{u}), \vec{u} \rangle - \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

Si l'équation $Q(\vec{u}) = \vec{q}$ admet une solution, alors cette solution minimise la fonctionnelle ψ

Réciproquement, s'il existe un champ \vec{u}_0 appartenant à E_Q qui minimise la fonctionnelle ψ , alors ce champ est solution de l'équation $Q(\vec{u}) = \vec{q}$

2-2-2 Démonstration

Proposition directe

L'hypothèse de départ est la suivante :

$$\exists \vec{u}_0 \in E_Q / Q(\vec{u}_0) = \vec{q}$$

Montrons tout d'abord que \vec{u}_0 est l'unique solution. Supposons qu'il y ait une autre solution :

$$\exists \vec{u}_1 \in E_Q / Q(\vec{u}_1) = \vec{q}$$

On a alors : $Q(\vec{u}_0) - Q(\vec{u}_1) = \vec{0} \Leftrightarrow Q(\vec{u}_0 - \vec{u}_1) = \vec{0}$

Ce qui nous donne : $\langle Q(\vec{u}_0 - \vec{u}_1), \vec{u}_0 - \vec{u}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}_0 - \vec{u}_1 = \vec{0}$ car Q est défini positif.

Montrons maintenant que la solution existante minimise la fonctionnelle.

Soit \vec{u} un élément quelconque de E_Q . Il est toujours possible \vec{v} appartenant à E_Q tel que :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v}$$

Michel MAYA
Enseignant en école d'ingénieur retraité

On a :
$$\psi(\bar{u}) = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}), \bar{u} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0 + \bar{v}), \bar{u}_0 + \bar{v} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 + \bar{v} \rangle$$

Ce qui nous donne :
$$\psi(\bar{u}) = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0), \bar{u}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0), \bar{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{u}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 \rangle - \langle \bar{q}, \bar{v} \rangle$$

Mais l'opérateur Q est symétrique :
$$\langle Q(\bar{u}_0), \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}_0, Q(\bar{v}) \rangle = \langle Q(\bar{v}), \bar{u}_0 \rangle$$

D'où :
$$\psi(\bar{u}) = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0), \bar{u}_0 \rangle + \langle Q(\bar{u}_0), \bar{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 \rangle - \langle \bar{q}, \bar{v} \rangle$$

On peut encore écrire :
$$\psi(\bar{u}) = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0), \bar{u}_0 \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 \rangle + \langle Q(\bar{u}_0), \bar{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{v} \rangle$$

Mais on a la relation :
$$Q(\bar{u}_0) - \bar{q} = \vec{0}$$

Ce qui nous donne :
$$\psi(\bar{u}) = \psi(\bar{u}_0) + \frac{1}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle$$

D'après la propriété du produit scalaire, nous pouvons écrire :
$$\forall \bar{v} \in E_A / \bar{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle > 0$$

Ceci nous prouve bien que nous détenons le minimum de la fonctionnelle :
$$\psi(\bar{u}) > \psi(\bar{u}_0) \quad \forall \bar{u} \neq \bar{u}_0$$

Proposition inverse

Cette fois l'hypothèse de départ est la suivante :
$$\exists \bar{u}_0 \in E_Q / \forall \bar{u} \in E_Q \quad \psi(\bar{u}) \geq \psi(\bar{u}_0)$$

On peut donc écrire :
$$\forall \bar{v} \in E_Q \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \psi(\bar{u}_0 + \lambda \bar{v}) \geq \psi(\bar{u}_0)$$

Mais on a :
$$\psi(\bar{u}_0 + \lambda \bar{v}) - \psi(\bar{u}_0) = \frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0 + \lambda \bar{v}), \bar{u}_0 + \lambda \bar{v} \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 + \lambda \bar{v} \rangle - \left[\frac{1}{2} \langle Q(\bar{u}_0), \bar{u}_0 \rangle - \langle \bar{q}, \bar{u}_0 \rangle \right]$$

D'où :
$$\psi(\bar{u}_0 + \lambda \bar{v}) - \psi(\bar{u}_0) = \lambda \langle Q(\bar{u}_0) - \bar{q}, \bar{v} \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle$$

Ce qui nous donne :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \lambda \langle Q(\bar{u}_0) - \bar{q}, \bar{v} \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \langle Q(\bar{v}), \bar{v} \rangle$$

Le polynôme $a \lambda^2 + b \lambda$ ne peut être toujours positif que si le coefficient b est nul. D'où :
$$\langle Q(\bar{u}_0) - \bar{q}, \bar{v} \rangle = 0$$

Le produit scalaire devant être nul quelque soit le vecteur \bar{v} , on a :
$$Q(\bar{u}_0) = \bar{q}$$

2-2-3 Remarques

Remarque 1 On vient de montrer l'équivalence entre les deux problèmes. La résolution de l'équation $Q(\bar{u}) = \bar{q}$ et la minimisation de la fonctionnelle ψ sont deux formulations équivalentes d'un même problème

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Toutefois, ce théorème ne fournit aucun renseignement sur l'existence de la solution. Il manque une hypothèse supplémentaire pour que la problème admette une solution.

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de la solution est que l'opérateur Q soit borné inférieurement. Dans la pratique, les opérateurs étant associés à des états physiques, cette condition est toujours réalisée.

Remarque 2 La symétrie et la définie positivité des opérateurs associés au problème d'élasticité ne sont acquises que si on les restreint à des espaces de champs nuls sur la frontière du corps étudié.

Pour les problèmes réels, la solution ne satisfait pas forcément à cette condition. On est amené à généraliser le théorème du minimum pour aboutir aux formulations globales.

2-3 Théorème de la forme bilinéaire

2-3-1 Enoncé

On considère une forme bilinéaire symétrique définie positive dans un espace E .

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \mapsto w(\vec{u}, \vec{v})$$

Soit E_0 un espace vectoriel tel que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in E_0$$

Considérons enfin la fonctionnelle ψ définie par :

$$\psi(\vec{u}) = \frac{1}{2} w(\vec{u}, \vec{u}) - L(\vec{u}) \text{ où } L(\vec{u}) \text{ est une fonctionnelle linéaire définie sur } E.$$

Si \vec{u} minimise ψ , alors \vec{u} est tel que : $\forall \vec{v} \in E / \vec{v} \neq \vec{0} \quad w(\vec{u}, \vec{v}) - L(\vec{v}) = 0$

Réciproquement, si \vec{u} est tel $\forall \vec{v} \in E / \vec{v} \neq \vec{0} \quad w(\vec{u}, \vec{v}) - L(\vec{v}) = 0$, alors \vec{u} minimise ψ

2-3-2 Démonstration

Remarquons tout d'abord que si (\vec{u}, \vec{u}') appartient à E^2 et si on note $\vec{\eta} = \vec{u} - \vec{u}'$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{u}') &= \psi(\vec{\eta} + \vec{u}') - \psi(\vec{u}') \\ &= \frac{1}{2} w(\vec{u}', \vec{u}') + w(\vec{\eta}, \vec{u}') + \frac{1}{2} w(\vec{\eta}, \vec{\eta}) - L(\vec{u}') - L(\vec{\eta}) - \psi(\vec{u}') \\ &= w(\vec{\eta}, \vec{u}') + \frac{1}{2} w(\vec{\eta}, \vec{\eta}) - L(\vec{\eta}) \end{aligned}$$

Proposition directe

On formule l'hypothèse suivante : \vec{u}_0 minimise la fonctionnelle ψ

On a donc :

$$\forall \vec{u} \in E / \vec{u} - \vec{u}_0 = \vec{\eta} \quad \text{alors} \quad \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{u}_0) \geq 0$$

D'où :

$$w(\vec{u}_0, \vec{\eta}) - L(\vec{\eta}) + \frac{1}{2} w(\vec{\eta}, \vec{\eta}) \geq 0$$

Soit \vec{v} un élément quelconque mais non nul de E . On peut dire : $\exists \lambda \in \mathcal{R} / \vec{\eta} = \lambda \vec{v}$

On a donc :

$$\frac{\lambda^2}{2} w(\vec{v}, \vec{v}) + \lambda (w(\vec{u}_0, \vec{v}) - L(\vec{v})) \geq 0$$

Cette inégalité devant être vraie quelque soit le scalaire λ on peut en déduire :

$$\forall \vec{v} \in E / \vec{v} \neq \vec{0} \quad w(\vec{u}_0, \vec{v}) - L(\vec{v}) = 0$$

Proposition inverse

Cette fois l'hypothèse est :

$$\text{Soit } \vec{u}_0 \text{ un élément de } E \text{ tel que } \quad \forall \vec{v} \in E / \vec{v} \neq \vec{0} \quad w(\vec{u}_0, \vec{v}) - L(\vec{v}) = 0$$

On peut alors écrire :

$$\forall \vec{u} \in E / \vec{u} - \vec{u}_0 = \vec{\eta} \quad \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{u}_0) = w(\vec{u}_0, \vec{\eta}) - L(\vec{\eta}) + \frac{1}{2} w(\vec{\eta}, \vec{\eta})$$

Mais, comme $\vec{\eta}$ est un élément de E , on peut dire : $0 = w(\vec{u}_0, \vec{\eta}) - L(\vec{\eta})$

Ce qui nous donne :

$$\forall \vec{u} \in E \quad \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{u}_0) = \frac{1}{2} w(\vec{\eta}, \vec{\eta}) \geq 0$$

2-4 Formulations variationnelles des problèmes d'élasticité

Ainsi que nous allons le constater, l'application des théorèmes précédents à un problème d'élasticité va nous conduire à des relations couramment utilisées.

2-4-1 Théorème des puissances virtuelles

On désigne par CA l'espace des champs vectoriels \vec{u} de déplacement deux fois continûment dérivables et respectant les conditions de déplacements imposés sur la surface Su du domaine (champs Cinématiquement Admissibles).

On désigne par CA_0 l'espace des champs vectoriels \vec{u}^* de déplacement deux fois continûment dérivables et ayant des déplacements nuls sur la surface Su du domaine.

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in CA^2 \rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in CA_0$$

Les relations de l'élasticité nous permettent d'écrire :

$$\vec{u} \mapsto \overset{=}{\varepsilon} / \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\overset{=}{\varepsilon} \mapsto \overset{=}{\sigma} / \sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

D'autre part nous pouvons définir les formes scalaires suivantes :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\forall \bar{u} \in CA, \forall \bar{u}^* \in CA_0 \mapsto P(\bar{u}, \bar{u}^*) = - \int_D \bar{\sigma} : \bar{\dot{\varepsilon}}^* dv = - \int_D \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dv$$

$$L(\bar{u}^*) = \int_D (\bar{f} - \rho \bar{\gamma}) \frac{d\bar{u}^*}{dt} dv + \int_{Sf} \bar{\Phi} \cdot \frac{d\bar{u}^*}{dt} dv$$

Dans cette dernière définition, Sf représente la surface du domaine à efforts imposés. De plus le vecteur $\frac{d\bar{u}^*}{dt}$ représente le vecteur **vitesse virtuelle** et on peut lui associer un tenseur taux de déformation virtuelle $\bar{\dot{\varepsilon}}^*$.

On constate facilement que $P(\bar{u}, \bar{u}^*)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. La quantité $\frac{1}{2} P(\bar{u}, \bar{u}^*)$ porte le nom de **puissance virtuelle** des efforts intérieurs dans le déplacement virtuel \bar{u}^* .

De plus $L(\bar{u}^*)$ est une forme linéaire, elle représente la puissance des forces extérieures volumiques \bar{f} et surfacique $\bar{\Phi}$ dans le déplacement virtuel \bar{u}^* .

Le théorème des puissances virtuelles s'énonce alors sous la forme :

Un champ de déplacement \bar{u} cinématiquement admissible est solution du problème d'élasticité si et seulement si :

$$\forall \bar{u}^* \in CA_0 \quad P(\bar{u}, \bar{u}^*) + L(\bar{u}^*) = 0$$

Comme on peut le deviner, ce théorème est une conséquence du théorème de la forme bilinéaire.

Pour le démontrer nous allons utiliser l'opérateur $A(\bar{u})$ précédemment défini :

$$\bar{u}(M) \xrightarrow{A} A(\bar{u}) = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] \bar{E}_i$$

On utilise alors le produit scalaire donné par :

$$\forall \bar{u} \in CA, \forall \bar{u}^* \in CA_0 \mapsto v(\bar{u}, \bar{u}^*) = \left\langle -A(\bar{u}) + \bar{f} - \rho \bar{\gamma}, \frac{d\bar{u}^*}{dt} \right\rangle = \int_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \frac{du_i^*}{dt} dv + \int_D (\bar{f} - \rho \bar{\gamma}) \cdot \frac{d\bar{u}^*}{dt} dv$$

Une intégration par partie nous donne :

$$\int_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \frac{du_i^*}{dt} dv = - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i^*}{dt} \right) dv + \int_{\partial D} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds$$

La surface ∂D du domaine est telle que $\partial D = Sf \cup Su$ avec $Sf \cap Su = \emptyset$. On a donc :

$$\int_{\partial D} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds = \int_{Sf} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds + \int_{Su} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds = \int_{Sf} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds$$

Ce qui nous donne :

$$v(\bar{u}, \bar{u}^*) = - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i^*}{dt} \right) dv + \int_{Sf} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds + \int_D (\bar{f} - \rho \bar{\gamma}) \cdot \frac{d\bar{u}^*}{dt} dv$$

De plus :
$$\int_D \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i^*}{dt} \right) dv = \int_D \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dv$$

Et :
$$\int_{Sf} \sigma_{ij} \frac{du_i^*}{dt} n_j ds = \int_{Sf} \Phi_i \frac{du_i^*}{dt} ds = \int_{Sf} \bar{\Phi} \frac{d\bar{u}^*}{dt} ds$$

D'où :
$$v(\bar{u}, \bar{u}^*) = P(\bar{u}, \bar{u}^*) + L(\bar{u}^*) = \left\langle -A(\bar{u}) + \vec{f} - \rho\vec{\gamma}, \bar{u}^* \right\rangle$$

Donc, si \bar{u} est solution du problème d'élasticité ($A(\bar{u}) = \vec{f} - \rho\vec{\gamma}$), le produit scalaire $v(\bar{u}, \bar{u}^*)$ est nul pour champ virtuel \bar{u}^* .

Réciproquement, si quel que soit le champ virtuel \bar{u}^* , le produit scalaire $v(\bar{u}, \bar{u}^*)$ est nul, alors l'intégrale $\int_D \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho\gamma_i \right) u_i^* dv$ est nulle. Ainsi, le champ \bar{u} est solution du problème d'élasticité.

2-4-2 Théorème du minimum généralisé

Nous nous donnons les formes suivantes :

$$\forall \bar{u} \in CA \mapsto w(\bar{u}, \bar{u}) = \int_D \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dv = \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$$

$$h(\bar{u}) = \int_D (\vec{f} - \rho\vec{\gamma}) \cdot \bar{u} dv + \int_{Sf} \bar{\Phi} \cdot \bar{u} dv$$

L'énoncé du théorème du minimum généralisé est alors le suivant :

La formulation locale du problème d'élasticité est équivalente à la formulation globale qui consiste à chercher un champ vectoriel \bar{u} cinématiquement admissible et qui minimise la fonctionnelle :

$$\psi(\bar{u}) = \frac{1}{2} w(\bar{u}, \bar{u}) - h(\bar{u})$$

La démonstration de ce théorème est quasi évidente.

La fonctionnelle ainsi définie est appelée **énergie totale du système** associée au déplacement \bar{u} . Elle est égale à la différence de l'énergie élastique de déformation et du travail des forces extérieures dans le même déplacement.

Remarque : Volontairement, nous avons présenté un théorème sous forme "vitesse" et l'autre sous forme "déplacement" mais il est possible de faire un mélange des deux types de présentation. On pourra ainsi parler du **théorème des travaux virtuels**.

2-5 Formes intégrales

2-5-1 Généralités

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace (x_i) et du temps t . Certaines variables (c) sont connues a priori (masse volumique, dimensions du système, sollicitations ...), mais d'autres (u) sont à déterminer (déplacement, température, contraintes ...)

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre u et c en utilisant les lois de la physique. Ces relations constituent un système d'équations. Les **degrés de liberté** du système sont les paramètres nécessaires pour déterminer les inconnues à un instant donné.

Un système est **discret** s'il possède un nombre de degrés de liberté fini, dans le cas contraire, il est dit **continu**.

Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques. Celui d'un système continu est représenté par un système d'équations différentielles associé à des conditions aux limites et des conditions temporelles. Les équations générées par un système continu ne peuvent généralement pas être résolues analytiquement. Il est donc nécessaire de **discrétiser** ces équations, c'est à dire de les remplacer par des équations algébriques. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes permettant de faire cette discrétisation.

Un système est dit **stationnaire** si ses variables ne dépendent pas du temps.

Pour la suite nous envisagerons le cas d'un système continu stationnaire dont les équations peuvent être décrites ainsi :

$$\begin{aligned} A(u) &= f && \text{dans le domaine } D \\ B(u) &= g && \text{sur la surface } \partial D \text{ du domaine} \end{aligned}$$

Dans ces équations A et B sont des opérateurs différentiels, f et g sont des fonctions connues.

2-5-2 Méthode des résidus pondérés

Dans la méthode des résidus pondérés, la solution exacte u_0 du problème est recherchée dans l'ensemble de fonction qui vérifient la condition sur la surface du domaine et qui d'autre part vérifient la forme intégrale suivante :

$$\int_D \alpha (A(u) - f) dv = 0$$

Dans cette forme intégrale, α est une fonction qui appartient à un ensemble de fonctions test E_α . On montre que l'on peut obtenir la solution exacte du système continu si l'ensemble E_α des fonctions test est infini et si toutes les fonctions test sont indépendantes. Dans le cas contraire nous n'aurons qu'une solution approchée.

2-5-3 Forme intégrale faible

La forme intégrale précédente implique deux contraintes qu'il est souvent difficile de respecter. D'une part il est nécessaire que la fonction u soit dérivable continûment au moins jusqu'à l'ordre de l'opérateur différentiel A , d'autre part, il est impératif que la fonction u vérifie les conditions aux limites imposées.

Il est possible de modifier ces conditions en faisant une intégration par partie et en changeant l'ordre de dérivation.

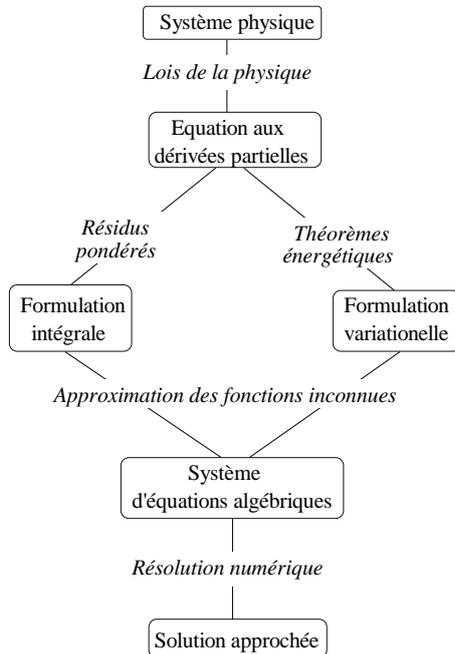
L'intégration par partie donne une **forme intégrale faible** qui présente les avantages suivants :

- * l'ordre maximum des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue.
- * certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites uniquement par u .

Par contre l'intégration par parties fait apparaître des dérivées de la fonction test α . Les conditions de dérivabilité de cette fonction augmentent. De plus on peut avoir à imposer certaines conditions à α pour faire disparaître certains termes de contour.

3 APPLICATION A LA M.E.F.

3-1 Présentation



Ainsi que nous venons de le voir, il existe plusieurs formulations d'un même problème.

En mécanique des solides, la notion de fonctionnelle est souvent utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie.

En fait cette méthode est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés qui fournit selon le choix des **fonctions de pondération** (ou fonctions test) tout un ensemble de formulation intégrale. Il reste donc maintenant à définir les fonctions test et à discrétiser l'ensemble dans lequel on va rechercher la solution.

On est conduit au schéma ci-contre.

La Méthode des Eléments Finis (MEF) intervient essentiellement dans la modélisation des fonctions inconnues

3-2 Discrétisation

La fonction inconnue recherchée est toujours supposée vérifier le système :

$$\begin{aligned} A(u) &= f && \text{dans le domaine } D \\ B(u) &= g && \text{sur la surface } \partial D \text{ du domaine} \end{aligned}$$

Nous supposons de plus qu'il existe une fonctionnelle F associée à une forme intégrale, et telle que la fonction inconnue u minimise l'intégrale :

$$\int_D F_v \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \dots \right) dv + \int_{\partial D} F_s \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \dots \right) ds$$

Enfin nous allons approximer la fonction inconnue par une approximation du type élément fini :

$$u(x_i) \approx u^{ap}(\bar{x}) = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda}(\bar{x}) u_{\lambda}$$

Dans cette expression, n représente le nombre total de noeuds d'interpolation et \bar{x} est le vecteur de l'ensemble des noeuds d'interpolation

Regardons maintenant comment cette approximation va nous permettre de passer du système continu au système discret.

3-2-1 Forme intégrale

Ce qui suit est valable aussi bien pour les formes intégrales fortes ou faibles. La différence vient de la prise en compte des conditions aux limites et des conditions imposées à u^{ap} qui sont choisies lors de la construction des éléments finis.

La discrétisation de la forme intégrale $\int_D \alpha(A(u)-f)dv=0$ se fait en prenant n fonction test α_{λ} (ou fonctions de pondération) **indépendantes**.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Nous sommes donc conduit à solutionner ce système :

$$\int_D \alpha_\lambda A(u^{ap}) dv = \int_D \alpha_\lambda f^{ap} dv \quad \text{pour } \lambda=1 \text{ à } n$$

La résolution de ce système à n équations pour n inconnues (u_λ) donne la solution du système discret. Le choix des fonctions test α_λ donne lieu à différentes méthodes.

Collocation par point

Les fonctions test α_λ sont égales aux distributions de Dirac en n points \vec{X}_λ^{col} appelés points de collocation.

La fonction de Dirac $\delta(x_i)$ en un point x_i est définie de la façon suivante :

$$\delta(x_i) = 0 \text{ si } x \neq x_i \text{ et } \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{x_i-\mu}^{x_i+\mu} \delta(x_i) dx = 1$$

On a donc :

$$A[u^{ap}(\vec{X}_\lambda^{col})] = f^{ap}(\vec{X}_\lambda^{col}) \text{ pour } \lambda=1 \dots n$$

Il est à noter le cas particulier où les points de collocation sont confondu avec les noeuds d'interpolation

Méthode de Galerkin

Cette fois les fonctions de pondération sont prises égales aux fonctions d'interpolation, soit :

$$\alpha_\lambda = N_\lambda \text{ pour } \lambda=1 \dots n$$

On obtient alors :

$$\int_D N_\lambda A(u^{ap}) dv = \int_D N_\lambda f^{ap} dv \quad \text{pour } \lambda=1 \text{ à } n$$

C'est une des méthodes les plus employées, surtout avec la forme intégrale faible.

Ainsi, si A est un opérateur linéaire :

$$A(u^{ap}(\vec{x})) = \sum_{\mu=1}^n [A(N_\mu(\vec{x}))] u_\mu$$

Ce qui nous donne :

$$\sum_{\mu=1}^n u_\mu \int_D N_\lambda A(N_\mu) dv = \int_D N_\lambda f^{ap} dv \quad \text{pour } \lambda=1 \text{ à } n$$

Soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Dans cette expression, \mathbf{U} est le vecteur colonne formé des fonctions d'interpolation u_μ , \mathbf{F} est le vecteur colonne des termes $f_\lambda = \int_D N_\lambda f^{ap} dv$ appelé vecteur des sollicitations et \mathbf{K} est la matrice carrée de terme général

$K_{\lambda\mu} = \int_D N_\lambda A(N_\mu) dv$ appelée matrice de raideur ou de rigidité.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

3-2-2 Forme variationnelle

Si le problème est exprimé sous forme variationnelle, la discrétisation se fait en minimisant l'expression par rapport aux n inconnues.

Considérons par exemple un problème de type variationnel caractérisé par la fonctionnelle :

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \langle Q(u), u \rangle - \langle q, u \rangle$$

L'approximation du champ inconnu nous conduit à la relation :

$$u(x_i) \approx u^{ap}(\bar{x}) = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda}(\bar{x}) u_{\lambda}$$

Nous avons donc pour notre fonctionnelle :

$$\psi(u) \approx \frac{1}{2} \langle Q(u^{ap}), u^{ap} \rangle - \langle q, u^{ap} \rangle = \psi(u^{ap}) = \psi(u_{\lambda})$$

En minimisant par rapport aux fonctions u_{μ} nous obtenons un système de n équations :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_{\lambda}} = 0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_{\lambda}} \langle Q(u^{ap}), u^{ap} \rangle - \frac{\partial}{\partial u_{\lambda}} \langle q, u^{ap} \rangle$$

Les produits scalaires sont des opérateurs linéaires. Nous pouvons donc écrire en utilisant l'approximation de la fonction inconnue :

$$u(x_i) \approx u^{ap}(\bar{x}) = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda}(\bar{x}) u_{\lambda}$$

$$\langle q, u \rangle = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda} \langle q, u_{\lambda} \rangle$$

$$\langle Q(u), u \rangle = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda} \langle Q(u), u_{\lambda} \rangle = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n N_{\mu} N_{\lambda} \langle Q(u_{\mu}), u_{\lambda} \rangle$$

En utilisant le théorème d'Euler sur les dérivations des fonctions quadratiques, nous obtenons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_{\lambda}} = 0 = N_{\lambda} \left[\sum_{\mu=1}^n N_{\mu} \langle Q(u_{\mu}), 1 \rangle - \langle q, 1 \rangle \right] \Rightarrow \mathbf{K U} = \mathbf{F}$$

3-2-3 Conditions aux limites

Jusqu'à présent, les conditions aux limites ne sont pas intervenues explicitement. Deux types de conditions aux limites sont à envisager.

Les conditions de type Neumann

Ce sont des conditions qui font intervenir la dérivée normale $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)$ sur une partie \mathcal{D}_{sn} de la frontière. En général, cette condition fait partie de la formulation. Si ce n'est pas le cas, il est bien difficile d'en tenir compte de façon rigoureuse sans augmenter le nombre d'inconnues. On peut toutefois construire des éléments finis, formulé directement avec $\frac{\partial u}{\partial n}$ comme inconnue mais la mise en oeuvre est bien plus délicate.

Les conditions de type Dirichlet

Ce sont des conditions d'imposition de la fonction inconnue u sur une partie de la frontière du domaine. Il n'y a pas de problème particulier puisqu'on peut agir directement sur les matrices du système.

Supposons par exemple que la valeur de u soit imposée au noeud λ : $u_\lambda = u_\lambda^0$

Pour prendre en compte cette imposition, il suffit de modifier de la façon suivante la matrice de rigidité et le vecteur des sollicitations :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1\lambda} = 0 & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{\lambda 1} = 0 & \dots & K_{\lambda\lambda} = 1 & \dots & K_{\lambda n} = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{n\lambda} = 0 & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F_1 - K_{1\lambda} u_\lambda^0 \\ \vdots \\ F_\lambda = u_\lambda^0 \\ \vdots \\ F_n - K_{n\lambda} u_\lambda^0 \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi un système de $n-1$ équations indépendantes pour $n-1$ inconnues.

3-3 Cas non linéaires

Jusqu'à présent nous n'avons envisagé que des problèmes physiques linéaires et stationnaires. Dans les faits nous devons parfois introduire des non-linéarités qui peuvent être d'origine matériau (loi de comportement) ou structural (instabilité de flambement). Les paramètres physiques deviennent alors des fonctions des inconnues.

Le caractère non linéaire n'introduit pas de différences fondamentales dans la formulation. Son traitement fait surtout appel à des méthodes purement numériques. On est ramené à résoudre une suite de systèmes linéaires en suivant une démarche itérative.

Ainsi pour une formulation de type Galerkin, nous avons :

$$\int_D N_\lambda A(u^{ap}) dv = \int_D N_\lambda f^{ap} dv \quad \text{pour } \lambda=1 \text{ à } n$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$G_\lambda(u_\mu) = F_\lambda$$

Lorsque l'opérateur A est linéaire, on obtient :

$$G_\lambda(u_\mu) = \sum_{\mu=1}^n K_{\lambda\mu} u_\mu = F_\lambda$$

Soit sous forme matricielle :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Comme les coefficients $K_{\lambda\mu}$ sont constants (indépendants des paramètres u_μ), l'ensemble de ces n équations forme un système linéaire. Dans le cas contraire, on est amené à adopter une méthode itérative.

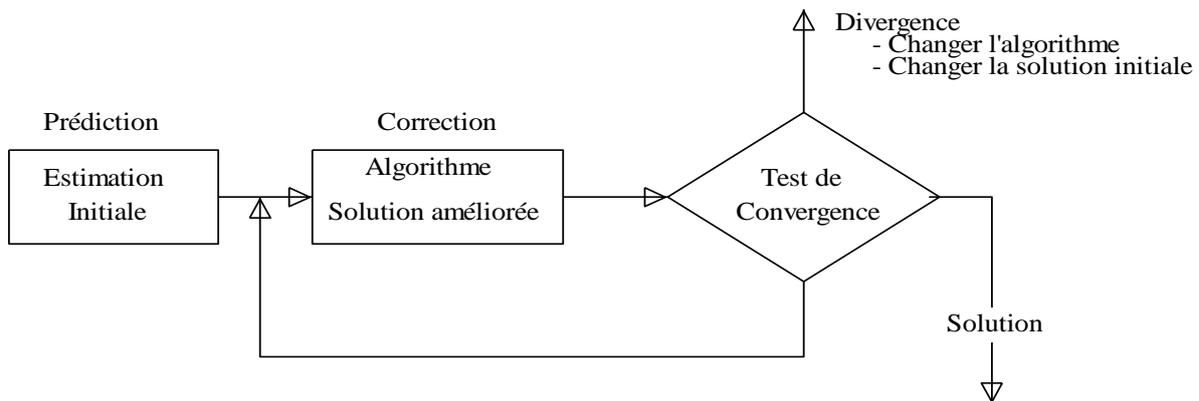
Comme de plus les conditions aux limites peuvent être fonction des paramètres u_μ , la formulation matricielle devient alors

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{U})\} \Leftrightarrow \{\mathbf{R}(\mathbf{U})\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{U})\} - [\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Dans certains cas (plasticité) nous n'avons qu'une forme incrémentale :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\Delta\mathbf{F}\}$$

Résoudre le système non linéaire, c'est trouver le vecteur $\{\mathbf{U}\}$ qui annule le **résidu** $\{\mathbf{R}(\mathbf{U})\}$. On procède par itération en imposant un test de convergence à chaque itération. Le schéma est alors le suivant :

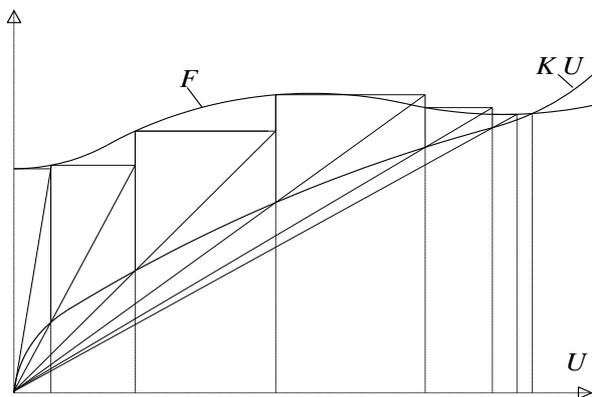


Dans la majorité des algorithmes, nous sommes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Dans la pratique, il n'existe malheureusement pas de processus itératif universel.

Les critères de choix d'un algorithme de résolution sont les suivants :

- * Type de non-linéarité (localisée ou totale, liée au comportement du matériau ou de la structure, ...)
- * Existence de solutions multiples
- * Risque de divergence
- * Précision et rapidité de convergence désirées.

3-3-1 Méthode de substitution



Dans cette méthode, on construit une suite de solutions $\{\mathbf{U}^i\}$ en résolvant le système suivant :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})]\{\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{U}^{i-1})\}$$

Bien entendu cette méthode nécessite le choix d'un vecteur initial $\{\mathbf{U}^0\}$. Pour faciliter la convergence, il est intéressant de choisir ce dernier aussi près que possible de la solution, mais comme on travaille avec un vecteur présentant n inconnues, ce choix est souvent très délicat. En général, on choisit le vecteur nul comme point de départ.

Le critère de convergence peut se faire :

- soit en comparant deux vecteurs consécutifs : $\{\Delta\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{U}^i\} - \{\mathbf{U}^{i-1}\}$
- soit en calculant le résidu de l'itération : $\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{U}^{i-1})\} - [\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})]\{\mathbf{U}^{i-1}\}$

Il est à noter que dans les deux cas nous devons travailler avec un vecteur et qu'il convient de se donner une norme pour faire le test de convergence. Nous pourrions prendre soit la norme classique (racine carrée de la somme des carrés des composantes du vecteur) soit la norme du maximum (valeur de la plus grande des composantes du vecteur).

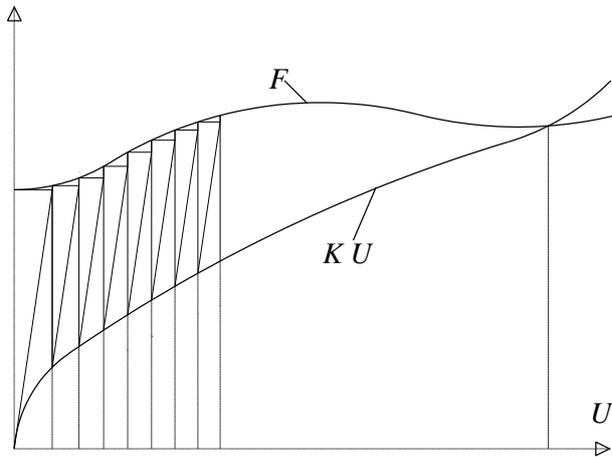
Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

3-3-2 Algorithme de Newton-Raphson modifié

Cette méthode fonctionne bien dans le cas où le vecteur $\{F\}$ est constant. On a alors :

$$\{R(U^i)\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} = [K(U^{i-1})]\{U^i\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} = [K(U^{i-1})]\{\Delta U^i\}$$



Reprenons la formulation matricielle initiale en décomposant la matrice $[K]$ en une matrice $[K_l]$ constante (linéaire) et une matrice $[K_{nl}]$ fonction de $\{U\}$ (non linéaire). On obtient :

$$\{R(U^i)\} = [K_l]\{\Delta U^i\} + [K_{nl}(U^{i-1})]\{\Delta U^i\}$$

Pour la résolution, on néglige la partie non linéaire. Le système devient :

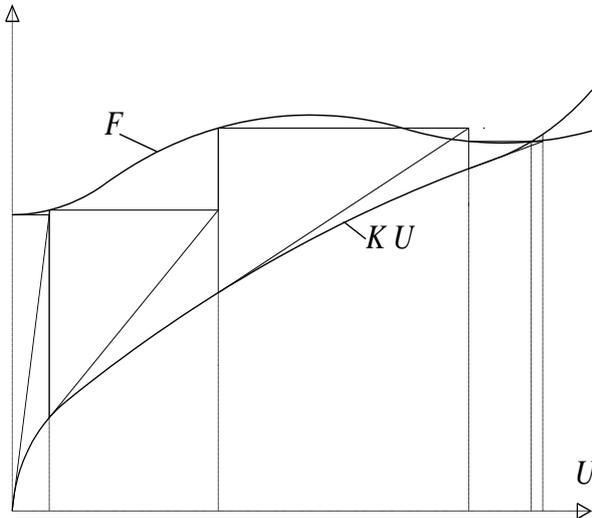
$$\{R(U^i)\} = [K_l]\{\Delta U^i\}$$

Les calculs sont plus simple que précédemment car on ne travaille qu'avec une seule matrice pour l'inversion du système à résoudre.

Cet algorithme est souvent employé dans le cas de faible non linéarités.

3-3-3 Méthode de Newton-Raphson

Pour les problèmes fortement non linéaires, il convient d'employer une méthode qui présente une bonne convergence ce qui n'est pas le cas des méthodes précédentes. Basée sur la notion d'application linéaire tangente, la méthode de Newton-Raphson répond bien à ce genre de problème.



A moins d'avoir la solution exacte du problème, le résidu d'une itération n'est pas nul :

$$\{R(U^i)\} = \{F(U^{i-1})\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq \{0\}$$

A l'itération suivante on cherche à annuler le résidu

$$\begin{aligned} \{R(U^{i+1})\} &= \{F(U^i)\} - [K(U^i)]\{U^i\} \\ &= \{R(U^i + \Delta U^{i+1})\} \approx \{0\} \end{aligned}$$

L'algorithme associé à la méthode est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de $\{U^i\}$:

$$\{R(U^i + \Delta U^{i+1})\} = \{R(U^i)\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U=U^i} \{\Delta U^{i+1}\} + \dots = \{0\}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur on obtient :

$$\{R(U^i)\} = - \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U=U^i} \{\Delta U^{i+1}\}$$

Sous forme matricielle :

$$\{R(U^i)\} = [K_t]\{\Delta U^{i+1}\}$$

On fait ainsi apparaître la matrice tangente $[K_t]$ dont l'expression peut être obtenu en dérivant le résidu :

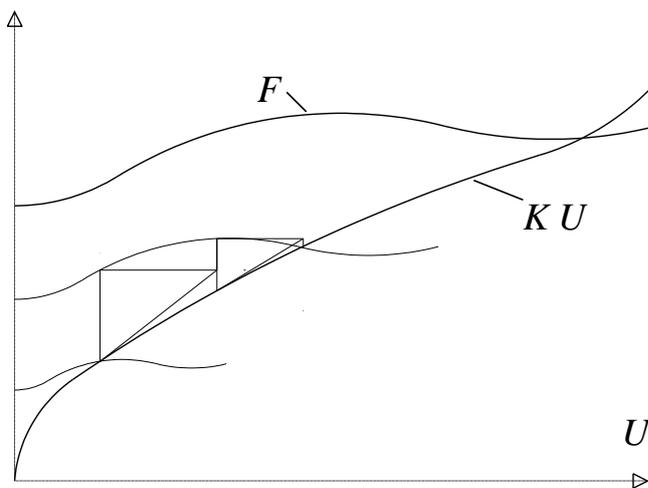
$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^i)] = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^i} = - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^i} + [\mathbf{K}(\mathbf{U}^i)] + \left[\frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{U})]}{\partial \mathbf{U}} \right] \{\mathbf{U}^i\}$$

Sous forme indicielle on a :

$$(K_t)_{ij} = - \frac{\partial F_i}{\partial u_j} + K_{ij} + \sum_l \frac{\partial K_{il}}{\partial u_j} u_l$$

3-3-4 Méthode incrémentale

Dans les méthodes itératives précédentes, la solution initiale joue un rôle important. Selon le choix de cette solution, les méthodes peuvent diverger, converger vers une solution non acceptable ou donner une bonne solution.



La méthode incrémentale consiste à appliquer virtuellement le chargement progressivement. On définit donc un paramètre de charge λ que l'on fait varier entre 0 et 1. On a pour une valeur λ_j du paramètre :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}_j)] \{\mathbf{U}_j\} = \lambda_j \{\mathbf{F}(\mathbf{U}_j)\}$$

Pour l'étape d'indice j , on prend la solution de l'étape $j-1$ pour solution initiale. Chaque étape est un problème non linéaire qui se résout à l'aide des méthodes précédentes. Toutefois, comme la solution initiale d'une étape donnée est proche de la solution finale, le nombre d'itération nécessaire est réduit et peut être limité à un.

Dans le cas d'un chargement constant, la méthode incrémentale, utilisant une itération de

Newton-Raphson s'écrit pour un niveau de sollicitation donné :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_{j-1})] \{\Delta \mathbf{U}_j\} &= \{\mathbf{R}(\mathbf{U}_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{R}(\mathbf{U}_{j-1})\} &= (\lambda_{j-1}) \{\mathbf{F}\} - [\mathbf{K}(\mathbf{U}_{j-1})] \{\mathbf{U}_{j-1}\} \\ \{\Delta \mathbf{U}_j\} &= \{\mathbf{U}_j\} - \{\mathbf{U}_{j-1}\} \end{aligned}$$

Dans le cas où on utilise plusieurs itérations on a :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_{j-1}^{i-1})] \{\Delta \mathbf{U}_j^i\} &= \{\mathbf{R}(\mathbf{U}_{j-1}^{i-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \{\mathbf{F}\} \\ \{\Delta \mathbf{U}_j^i\} &= \{\mathbf{U}_j^i\} - \{\mathbf{U}_{j-1}^{i-1}\} \end{aligned}$$

3-4 Cas instationnaires

Le caractère instationnaire du problème implique une discrétisation temporelle supplémentaire qui permet d'intégrer (dans le temps) le système différentiel. On est ramené à résoudre à chaque pas de temps un système qui peut être non-linéaire.

La discrétisation spatiale d'un problème instationnaire conduit à une équation différentielle en temps qui de façon générale se présente sous la forme suivante :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Cette équation (qui en fait est un système d'équations) est assortie d'une condition temporelle à l'instant t_0 :

$$\left\{ \dot{\mathbf{U}}(t_0) \right\} = \{\dot{\mathbf{U}}_0\} \quad \left\{ \mathbf{U}(t_0) \right\} = \{\mathbf{U}_0\}$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Dans un système linéaire, les matrices sont indépendantes des paramètres. De plus, dans de nombreux systèmes physiques, les matrices sont indépendantes du temps. Le cas le plus complexe est bien entendu celui associé à des matrices fonctions des paramètres (non linéaires) et dépendantes du temps.

Il est toujours possible de transformer un système du second ordre en un système du premier ordre. Toutefois cette opération n'est que peu utilisée car elle exige une réorganisation des matrices et elle conduit à des matrices non symétriques. De plus il existe des méthodes efficaces pour résoudre directement les systèmes du second ordre.

Comme dans le cas précédent, il existe plusieurs schémas de résolution et nous nous contenterons de présenter le schéma **d'Euler explicite** dans le cas d'un système du premier ordre. On se donne la relation numérique suivante :

$$\{\dot{\mathbf{U}}(t)\} = \{\dot{\mathbf{U}}_i\} = \frac{1}{\Delta t} [\{\mathbf{U}(t + \Delta t)\} - \{\mathbf{U}(t)\}]$$

La solution $\mathbf{U}(t)$ étant connue, on peut écrire :

$$\{\mathbf{U}(t + \Delta t)\} = \{\mathbf{U}(t)\} + \Delta t [\mathbf{C}^{-1}(t)] \{\{\mathbf{F}(t)\} - [\mathbf{K}(t)]\{\mathbf{U}(t)\}\}$$

Un des principaux problèmes rencontrés est la définition du pas de temps. En effet, selon le schéma d'intégration, les algorithmes peuvent ne pas être stables.

La discrétisation temporelle est une opération qui s'avère le plus souvent délicate et fortement dépendante du problème considéré. Selon la nature du couplage entre les variables d'espace et de temps, la solution par éléments finis peut être affectée de façon significative par le schéma d'intégration temporelle. En particulier, on est souvent conduit à des approximations dans l'écriture des équations d'équilibre et on doit résoudre alors un problème spatial en "équilibre approximatif".

FORMULATIONS ELASTOPLASTIQUE ET VISCOPLASTIQUE

1- RAPPEL DES EQUATIONS

L'introduction de la plasticité dans la loi de comportement d'un matériau ajoute quelques difficultés supplémentaires au traitement des équations. Il faut toutefois bien noter que l'on peut obtenir plusieurs solutions à un même lot d'équations. Par conséquent, si on a obtenu *une solution*, il reste possible que cette solution ne soit pas nécessairement *la solution* recherchée.

L'utilisation des méthodes pas à pas et une bonne compréhension des phénomènes sont essentielles si on veut avoir des chances d'arriver à la bonne solution.

1-1 Théorème des puissances virtuelles

Ainsi que nous l'avons déjà vu, le théorème des puissances virtuelles n'est qu'une conséquence du principe fondamental de la mécanique.

On désigne par E_v l'espace des champs de vitesses virtuelles \vec{v}^* compatibles avec les liaisons. A chaque champ de vitesse virtuelle, on peut associer :

- la puissance virtuelle des quantités d'accélération $P_a^* = \int_D \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* dv$

- la puissance virtuelle des efforts extérieurs $P_e^* = \int_D \vec{f} \cdot \vec{v}^* dv + \int_{\mathcal{A}} \vec{\Phi} \cdot \vec{v}^* ds$

- la puissance virtuelle des efforts intérieurs $P_i^* = - \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^* dv = - \int_D \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dv$

$$\text{avec } \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^* = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\text{grad} \vec{v}^*}} + {}^T \overline{\overline{\text{grad} \vec{v}^*}} \right] \Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} \right]$$

Le théorème des puissances virtuelles s'énonce ainsi :

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts extérieurs, augmentée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$P_a^* = P_e^* + P_i^*$$

Souvent, dans nos applications, la puissance virtuelle des quantités d'accélération et des forces volumiques seront nulles. On obtient alors :

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{\Phi} \cdot \vec{v}^* ds - \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^* dv = 0$$

1-2 Loi de comportement

Le taux de déformation total $\dot{\bar{\varepsilon}}$ peut être décomposé en la somme d'un taux de déformation élastique $\dot{\bar{\varepsilon}}^{el}$ et d'un taux de déformation plastique $\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{el} + \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$$

Le taux de déformation élastique est fonction de l'état de contrainte et des sollicitations thermiques :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + A : \bar{\varepsilon}^{el} - \beta(T - T^0)$$

avec :

- $\bar{\sigma}^0$: tenseur des contraintes dans la configuration initiale
- A : tenseur d'élasticité du quatrième ordre
- β : tenseur des coefficient de dilatation thermique
- T^0 : température dans la configuration initiale

En fait nous prendrons la formule simplifiée :

$$\bar{\sigma} = A : \bar{\varepsilon}^{el}$$

Pour décrire l'évolution de la déformation plastique, il faut choisir un critère de plasticité, par exemple le critère de Von Misès :

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{2}} - \sigma_0(\bar{\varepsilon})$$

Dans cette expression, le dernier terme permet de prendre en compte le phénomène d'érouissage. D'autre part $\bar{\varepsilon}$ représente la déformation plastique équivalente :

$$(\bar{\varepsilon})^2 = \frac{2}{3} \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} : \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$$

La loi de la normalité nous donne :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} = \lambda_p \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \lambda_p \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Nous nous trouvons donc dans les cas suivants :

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) < 0 \Rightarrow \text{Charge élastique} \\ f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} < 0 \Rightarrow \text{Décharge élastique} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\sigma}} = A : \dot{\bar{\varepsilon}}^{el} \\ \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} \geq 0 \Rightarrow \text{Charge élastoplastique} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\sigma}} = A : \dot{\bar{\varepsilon}}^{el} \\ \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \end{array} \right.$$

1-3 Discrétisation temporelle

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

La forme précédente des équations montre que le temps n'intervient pas explicitement: la réponse élastique ou élastoplastique est instantanée.

La difficulté rencontrée lors de la résolution du problème mécanique élastoplastique provient du caractère particulier de la loi de comportement :

* il est nécessaire d'intégrer au cours du processus de déformation en satisfaisant à chaque instant aux conditions d'équilibre.

* l'état de contrainte doit constamment être relié à la déformation plastique équivalente par la condition de consistance plastique $f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \leq 0$

* la loi de comportement étant constituée du raccordement des lois élastiques et élastoplastiques, il importe de prendre correctement en compte les transitions de l'une à l'autre.

La méthode de résolution proposée repose sur une discrétisation temporelle. Le temps d'évolution complet (t_0, t_f) est décomposé en une suite de valeurs $(t_0, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_f)$. Bien entendu, à chaque instant t_i les équations d'équilibre doivent être satisfaites.

Le problème posé est le suivant. Partant d'une configuration en équilibre sous un chargement imposé $\bar{\Phi}(P, \bar{n})$, il s'agit de trouver le champ de déplacement incrémental de tel sorte que la nouvelle configuration soit encore en équilibre. On peut aussi formuler le problème sous la forme suivante :

$$\text{Sachant que } \forall \bar{v} \text{ * admissible, } \int_{\mathcal{D}(t_i)} \bar{\Phi}(P, \bar{n}) \cdot \bar{v} \text{ * } ds - \int_{\mathcal{D}(t_i)} \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}} \text{ * } dv = 0$$

Trouver un déplacement incrémental tel que

$$\forall \bar{v} \text{ * admissible, } \int_{\mathcal{D}(t_i + \Delta t_i)} \bar{\Phi}(P, \bar{n}) \cdot \bar{v} \text{ * } ds - \int_{\mathcal{D}(t_i + \Delta t_i)} \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}} \text{ * } dv = 0$$

2- INTEGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT

Suivant la méthode incrémentale, la loi de comportement doit être intégrée sur le pas de temps Δt_i . Cette intégration est possible si les variations de $\bar{\varepsilon}$ sont supposées connues. L'hypothèse faite ici est de considérer $\bar{\varepsilon}$ constant sur l'intervalle de temps Δt_i .

Après avoir découpé les équations en équations déviatoriques et équation pour la pression, nous examinerons l'intégration numérique dans les cas de figure suivants :

- loi élastique
- loi élastoplastique
- transition élastique - élastoplastique

2-1 Découplage déviateur - pression

La partie plastique de la déformation étant incompressible, c'est à dire indépendante de la pression, le premier invariant du tenseur des contraintes n'intervient pas dans le critère de plasticité. Ce dernier peut donc se mettre sous la forme d'une relation entre le tenseur déviateur des contraintes et la déformation plastique équivalente :

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \rightarrow f(\bar{s}, \bar{\varepsilon})$$

On alors écrire les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}) \mathbf{1} + \overline{\dot{\varepsilon}} \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} = \frac{1}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}^{el}) \mathbf{1} + \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} = \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} \\ \overline{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Trace}(\overline{\sigma}) \mathbf{1} + s = -p \mathbf{1} + s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{\varepsilon}} \text{ Tenseur des taux de déformation déviatorique} \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \text{ Tenseur des taux de déformation déviatorique élastique} \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} \text{ Tenseur des taux de déformation déviatorique plastique} \\ p \text{ Pression} \end{array} \right.$$

Dans le cas élastique, les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{\sigma}} = A : \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} = \lambda \text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}^{el}) \mathbf{1} + 2\mu \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{s}} = 2\mu \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \\ \overline{\dot{p}} = -\frac{1}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\sigma}}) = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}^{el}) \\ \overline{\dot{\varepsilon}} = 0 \end{array} \right.$$

L'intégration sous forme incrémentale est évidente :

$$\text{Si } f(\overline{s}, \overline{\varepsilon}) < 0 \text{ et si } f(\overline{s} + \Delta s, \overline{\varepsilon}) \leq 0$$

$$\text{Alors } \Delta p = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\overline{\Delta \varepsilon}) \quad \overline{\Delta s} = 2\mu \overline{\Delta \varepsilon} \quad \overline{\Delta \varepsilon} = 0$$

Dans le cas d'un comportement élastoplastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{\sigma}} = A : \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \\ f(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}) = 0 \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{\dot{s}} = 2\mu \overline{\dot{\varepsilon}}^{el} \\ \overline{\dot{p}} = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}) \\ f(\overline{s}, \overline{\varepsilon}) = s : s - \frac{2}{3} \sigma_0^2 = 0 \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^{pl} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial s} = \lambda_p s \end{array} \right.$$

Dans cette dernière expression, σ_0 représente la contrainte d'écoulement du matériau. L'écroissage nous permet d'affirmer que cette contrainte est fonction de la déformation plastique équivalente $\overline{\varepsilon}$.

2-2 Loi élastoplastique

2-2-1 Solution analytique de référence

L'intégration exacte de la loi élastoplastique est possible pour un écroissage cinématique linéaire sous l'hypothèse d'un taux de déformation constant ($\dot{\varepsilon} = cte$). Cette solution analytique permet d'évaluer les performances des méthodes numériques présentées plus loin. Le calcul de la pression ne pose pas plus de difficultés que dans le cas de l'élasticité.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\dot{p} = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \Rightarrow \Delta p = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\underline{\underline{\Delta\varepsilon}})$$

Pour déterminer l'équation différentielle qui nous permettra de calculer le tenseur déviateur des contraintes, il faut reprendre les équations précédentes avec un écrouissage linéaire.

On a :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{s}}} = 2\mu \dot{\underline{\underline{e}}} \\ \dot{\underline{\underline{e}}}^{el} = \dot{\underline{\underline{e}}} - \dot{\underline{\underline{e}}}^{pl} \\ \dot{\underline{\underline{e}}}^{pl} = \lambda_p \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{2}{3} \sigma_0^2 = cte = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{\underline{s}}} = 2\mu (\dot{\underline{\underline{e}}} - \lambda_p \underline{\underline{s}}) \\ \lambda_p = \frac{\dot{\underline{\underline{e}}}^{pl} : \underline{\underline{s}}}{R^2} \\ \dot{\underline{\underline{s}}} : \underline{\underline{s}} = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\dot{\underline{\underline{e}}}^{el} : \underline{\underline{s}} = \frac{\dot{\underline{\underline{s}}} : \underline{\underline{s}}}{2\mu} = 0$$

Ce qui nous donne :

$$\dot{\underline{\underline{s}}} = 2\mu \left(\dot{\underline{\underline{e}}} - \frac{\dot{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{s}}}{R^2} \underline{\underline{s}} \right)$$

Car :

$$\dot{\underline{\underline{e}}}^{pl} : \underline{\underline{s}} = \dot{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{s}} - \dot{\underline{\underline{e}}}^{el} : \underline{\underline{s}} = \dot{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{s}}$$

On se place dans le cas d'une charge élastoplastique. A une étape d'itération d'indice i on peut écrire :

$$\underline{\underline{s}}_i : \underline{\underline{s}}_i = \frac{2}{3} \sigma_0^2 \quad \text{Critère de Von Misès}$$

Considérons un instant très proche caractérisé par Δt . La charge étant élastoplastique, l'étape $i+1$ est encore plastique. On a :

$$\underline{\underline{\Delta s}}_i = \underline{\underline{s}}_{i+1} - \underline{\underline{s}}_i = \left(\dot{\underline{\underline{s}}} \right)_i \Delta t$$

On peut alors définir l'accroissement du tenseur déviateur des déformations :

$$\underline{\underline{\Delta e}}_i = \left(\dot{\underline{\underline{e}}} \right)_i \Delta t = \underline{\underline{\Delta e}}_i^{el} + \underline{\underline{\Delta e}}_i^{pl}$$

L'accroissement élastique est donné par :

$$\underline{\underline{\Delta e}}_i^{el} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\Delta s}}_i$$

Et nous pouvons écrire :

$$\underline{\underline{\Delta s}}_i = 2\mu \left(\underline{\underline{\Delta e}}_i - \frac{\underline{\underline{\Delta e}}_i : \underline{\underline{s}}_i}{R^2} \underline{\underline{s}}_i \right)$$

2-2-2 Méthodes numériques avec reprojction sur le critère

La solution analytique donnée précédemment ne peut s'appliquer que dans le cas d'un écrouissage cinématique linéaire. Dans le cas d'une fonction d'écrouissage quelconque, le recours à des méthodes numériques est inévitable.

Bien entendu le choix de la méthode se fera suivant des critères relativement stricts. Le temps de calcul devra être le plus faible possible, tout en assurant une convergence optimale. Les méthodes avec reprojction sur le critère présentent l'avantage d'avoir une interprétation géométrique simple.

L'étape i étant une étape élastoplastique, on a un point associé A_i qui est sur la surface du critère de limite élastique. Après un accroissement de chargement correspondant à un incrément de temps Δt , le nouveau point A_{i+1} doit se trouver lui aussi sur la surface du critère. Pour positionner ce nouveau point, on considère dans une première étape que l'accroissement de chargement est purement élastique. On peut donc écrire :

$$\underline{s}_{T_i} = \underline{s}_i + 2\mu \Delta e_i$$

On peut donc associer un point T_i à ce nouvel état. Bien entendu ce nouveau point n'a aucune raison d'être sur la surface du critère. On utilise alors des notions de "projection" pour obtenir une position approximative du nouveau point A_{i+1} sur la surface du critère.

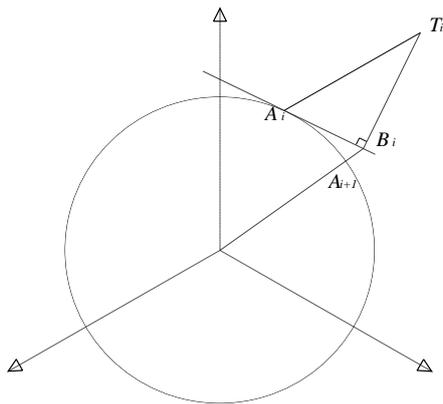
Il est à noter que la relation tensorielle précédente montre que le tenseur \underline{s}_{T_i} est une combinaison linéaire des tenseurs \underline{s}_i et Δe_i . On peut donc sans difficulté admettre que les tenseurs sont coplanaires et la figure de représentation des différents points est plane. D'autre part, vu la forme particulière du critère de Von Mises, on peut concevoir que le plan d'étude est le plan déviatorique. En effet un accroissement de la pression ne fait que déplacer le point A_i selon une droite parallèle à l'axe du cylindre.

Il existe plusieurs techniques de projection et nous allons en exposer deux.

Afin de faciliter l'étude, nous nous limiterons au cas d'un écrouissage nul, c'est à dire d'une surface associée au critère constante. Dans un cas un peu plus général, il faut prendre en compte l'évolution de la surface du critère en fonction de l'écrouissage.

Reprojction sur la tangente suivie d'un retour radial

Pour obtenir le point A_{i+1} , on projette le point T_i sur la tangente à la surface du critère en A_i .



On obtient un point B_i caractérisé par la relation : $(\underline{s}_{B_i} - \underline{s}_i) : \underline{s}_i = 0$

De plus, le segment $T_i B_i$ étant tangent à la surface en A_i , il est parallèle au rayon vecteur de positionnement du point A_i :

$$\underline{s}_{T_i} - \underline{s}_{B_i} = K \underline{s}_i$$

Comme le point B_i n'est toujours pas sur la surface du critère, on définit le point A_{i+1} comme étant l'intersection du rayon vecteur du point B_i avec la surface du critère.

On a donc :

$$\underline{s}_{i+1} = \alpha \underline{s}_{B_i} \quad \text{avec} \quad R^2 = \underline{s}_i : \underline{s}_i = \underline{s}_{i+1} : \underline{s}_{i+1}$$

On obtient :

$$\alpha^2 (\underline{s}_{B_i} : \underline{s}_{B_i}) = R^2$$

Pour positionner le point B_i on a :

$$\left. \begin{aligned} \overline{s_{T_i}} - \overline{s_i} &= 2\mu \overline{\Delta e_i} \Rightarrow \left(\overline{s_{T_i}} - \overline{s_i} \right) \overline{s_i} = 2\mu \overline{\Delta e_i} : \overline{s_i} \\ \left(\overline{s_{B_i}} - \overline{s_i} \right) \overline{s_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\overline{s_{T_i}} - \overline{s_{B_i}} \right) \overline{s_i} = 2\mu \overline{\Delta e_i} : \overline{s_i}$$

D'autre part :

$$\overline{s_{T_i}} - \overline{s_{B_i}} = K \overline{s_i} \quad \text{et} \quad R^2 = \overline{s_i} : \overline{s_i}$$

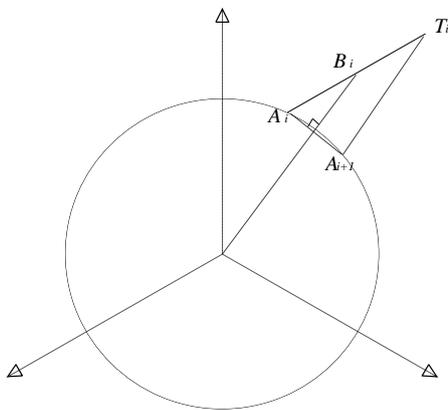
Ce qui nous donne :

$$K = \frac{2\mu}{R^2} \overline{\Delta e_i} : \overline{s_i}$$

On obtient alors :

$$\overline{s_{i+1}} = \alpha \overline{s_{B_i}} = \alpha \left(\overline{s_{T_i}} - \frac{2\mu}{R^2} \left(\overline{\Delta e_i} : \overline{s_i} \right) \overline{s_i} \right) = \alpha \left(\overline{s_i} + 2\mu \overline{\Delta e_i} - \frac{2\mu}{R^2} \left(\overline{\Delta e_i} : \overline{s_i} \right) \overline{s_i} \right)$$

Méthode de la normale moyenne



Cette méthode est représentée par la figure ci-contre. Les équations associées sont :

$$\left. \begin{aligned} \overline{s_{T_i}} - \overline{s_i} &= 2\mu \overline{\Delta e_i} \\ \left(\overline{s_{i+1}} - \overline{s_i} \right) \overline{s_{B_i}} &= 0 \\ \overline{s_{T_i}} - \overline{s_{i+1}} &= K \overline{s_{B_i}} \\ \overline{s_{B_i}} &= \frac{1}{2} \left(\overline{s_{T_i}} + \overline{s_i} \right) = \overline{s_i} + \mu \overline{\Delta e_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{s_{i+1}} = \overline{s_i} + 2\mu \overline{\Delta e_i} - 2\mu \frac{\overline{\Delta e_i} : \overline{s_{B_i}}}{\overline{s_{B_i}} : \overline{s_{B_i}}} \overline{s_{B_i}}$$

2-3 Solution numérique avec consistance plastique

La méthode précédente est approximative, aussi nous allons proposer une méthode numérique plus rigoureuse.

Dans cette méthode, nous utilisons un paramètre ajustable η . Le cas de la loi de Prandtl-Reuss avec le critère de Von-Mises permet de mener facilement les calculs à leur terme.

2-3-1 Ecriture d'une équation scalaire

Ecrites avec les tenseurs déviateurs, les équations à traiter sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\dot{e}^{el}} &= \frac{\overline{\dot{s}}}{2\mu} \\ \dot{p} &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{Trace}(\overline{\dot{\epsilon}}) \end{aligned} \right\} \text{Comportement élastique}$$

$$\overline{\dot{e}} = \overline{\dot{e}^{el}} + \overline{\dot{e}^{pl}} \quad \text{Séparation élastique - plastique}$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\left. \begin{aligned} \overline{\dot{e}^{pl}} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial s}(\overline{s}) \\ f(\overline{s}, \overline{\varepsilon}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Comportement plastique}$$

Sous forme incrémentale, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta e^{el}} &= \frac{\overline{\Delta s}}{2\mu} \\ \overline{\Delta p} &= -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\overline{\Delta \varepsilon}) \\ \overline{\Delta e} &= \overline{\Delta e^{el}} + \overline{\Delta e^{pl}} \\ \overline{\Delta e^{pl}} &= \Delta \lambda \left[(1-\eta) \frac{\partial f}{\partial s}(\overline{s}_i) + \eta \frac{\partial f}{\partial s}(\overline{s}_i + \overline{\Delta s}) \right] \\ f(\overline{s}_i, \overline{\varepsilon}_i) &= 0 \quad \text{et} \quad f(\overline{s}_i + \overline{\Delta s}, \overline{\varepsilon}_i + \overline{\Delta \varepsilon}) = 0 \end{aligned}$$

L'équation en pression s'intègre très facilement.

Le paramètre η prend des valeurs comprises entre 1 et 0. Il permet de retrouver les schémas d'intégrations classiques. Ainsi, pour $\eta=1$ on obtient le schéma de "retour radial" qui est en fait un schéma d'Euler implicite, pour $\eta=0,5$ on a le schéma analogue à la méthode de la normale moyenne et pour $\eta=0$ on a un schéma d'Euler explicite.

En utilisant le critère de Von-Mises, le système d'équations devient :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta s} &= \frac{\overline{\Delta e} - \Delta \lambda s_i}{\frac{1}{2\mu} + \eta \Delta \lambda} \\ \overline{\Delta e^{pl}} &= \Delta \lambda (\overline{s}_i + \eta \overline{\Delta s}) \\ \overline{s}_i : \overline{s}_i &= \frac{2}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \quad \Rightarrow \quad \overline{s}_i : \overline{s}_i = \frac{2}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \\ (\overline{s}_i + \overline{\Delta s}) : (\overline{s}_i + \overline{\Delta s}) &= \frac{2}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i + \overline{\Delta \varepsilon}) \quad \overline{s}_i : \overline{\Delta s} + \overline{\Delta s} : \overline{\Delta s} = \frac{2}{3} [\sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i + \overline{\Delta \varepsilon}) - \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i)] \end{aligned}$$

L'élimination de $\overline{\Delta s}$ nous donne alors :

$$\begin{aligned} G(\Delta \lambda) &= (\Delta \lambda)^2 \left[-\frac{2\mu\eta}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \right] + \Delta \lambda \left[\mu(\eta-1) \overline{s}_i : \overline{\Delta e} - \frac{1}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \right] + \mu \left[\frac{1}{2} \overline{\Delta e} : \overline{\Delta e} + \frac{1}{3} \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \right] \\ &= \frac{\mu}{3} \left[\frac{1}{2\mu} + \eta \Delta \lambda \right]^2 \left[\sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i + \overline{\Delta \varepsilon}) - \sigma_0^2(\overline{\varepsilon}_i) \right] = g(\Delta \lambda) \end{aligned}$$

Cette équation du second degré en $\Delta \lambda$ nous permet ensuite de calculer :

* l'accroissement du tenseur déviateur des contraintes :

$$\overline{\Delta s} = \frac{\overline{\Delta e} - \Delta \lambda s_i}{\frac{1}{2\mu} + \eta \Delta \lambda}$$

* l'accroissement de la déformation plastique équivalente :

$$\bar{\Delta \varepsilon} = \frac{\Delta \lambda}{\frac{1}{2\mu} + \eta \Delta \lambda} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \bar{\Delta e} \right) ; \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \bar{\Delta e} \right) \right]^{1/2}$$

Comme on peut le constater, la solution sera donnée par l'équation : $G(\Delta \lambda) = g(\Delta \lambda)$

Les fonctions G et g sont des fonctions paraboliques. Dans le cas de l'érouissage $\left(\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} \geq 0, \forall \varepsilon \right)$, $g(\Delta \lambda)$ est positive, monotone croissante et passant par l'origine ($g(0)=0$).

L'étude de la parabole $G(\Delta \lambda)$ permet de tirer quelques conclusions :

- * si $1 \geq \eta \geq \frac{1}{2}$: l'existence d'une solution unique à l'équation $G(\Delta \lambda) = g(\Delta \lambda)$ est garantie
- * si $\frac{1}{2} \geq \eta \geq 0$: plusieurs cas de figure sont possibles suivant les valeurs des termes de la parabole $G(\Delta \lambda)$. On peut avoir deux, une ou aucune solution positive à notre équation.

Pour la suite des calculs nous considérerons $1 \geq \eta \geq \frac{1}{2}$.

2-3-2 Résolution de l'équation scalaire

Comme nous venons de le voir, nous avons à solutionner une équation scalaire en $\Delta \lambda$ du second degré à coefficients non constants.

La fonction $g(\Delta \lambda)$ est dépendante du phénomène d'érouissage.

Érouissage linéaire $\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} = cste = \rho$

Le paramètre $\Delta \lambda$ est solution de l'équation du second degré suivante :

$$(\Delta \lambda)^2 \left[\mu(1-2\eta) \frac{\sigma_0^2(\bar{\varepsilon}_i)}{3} \left(\eta H + \frac{I}{\mu} \right) \right] + \Delta \lambda \left[\mu(\eta-1) \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \bar{\Delta e} \right) - \frac{\sigma_0^2(\bar{\varepsilon}_i)}{3} - \frac{H}{2\mu} \right] + \frac{1}{2} \left[\mu \bar{\Delta e} + \frac{\bar{s}_i}{2\mu} \right] = 0$$

Avec :

$$H = \frac{2}{3} \sigma_0 \rho \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \mu \bar{\Delta e} \right) ; \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \mu \bar{\Delta e} \right) \right]^{1/2}$$

$$I = \frac{1}{3} \rho^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \mu \bar{\Delta e} \right) ; \left(\frac{\bar{s}_i}{2\mu} + \eta \mu \bar{\Delta e} \right) \right]$$

On peut alors résoudre simplement cette équation du second degré.

Érouissage non linéaire

La non linéarité de l'écoulement provoque entre autres une dépendance des coefficients de l'équation de second degré vis à vis de la variable $\Delta\lambda$. La solution ne peut donc qu'être numérique. On peut par exemple utiliser la méthode de Newton.

On se fixe une valeur d'initialisation de la variable $\Delta\lambda_0$ et une valeur de l'erreur δ admise sur un pas de calcul. Par test et modification de la valeur de la variable on essaie de converger. La valeur initiale est soit prise égale à 0, soit prise égale à la solution du cas de l'écoulement linéaire.

3- LA VISCOPLASTICITE

En général, la déformation des métaux se décompose en une partie élastique faible et une partie plastique. Dans les applications de mise en forme, cette dernière est prépondérante.

A froid, la notion de limite entre ces deux parties est clairement établie (notion de seuil). Eventuellement, un paramètre d'écoulement permettra de prendre en compte une évolution de ce seuil. On fera alors intervenir la notion de déformation pour représenter l'évolution de cette surface seuil.

Dans le domaine des hautes températures, les métaux ont un comportement différent. Le domaine élastique peut être négligé à cause du rôle important de la vitesse de déformation. On constate alors une nette diminution des efforts mis en jeu pour un résultat de déformation final imposé. Etant au voisinage de la moitié de la température de fusion (exprimée en °K), l'état structural de la matière est perturbé par une activation thermique qui favorise le processus de déformation mécanique. Le comportement du matériau est alors comparable à celui d'un fluide. On obtient un état *viscoplastique*.

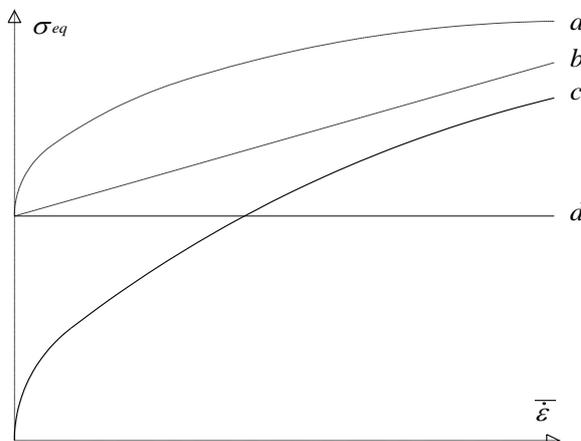
3-1 Le modèle de comportement

Pour établir un modèle de comportement viscoplastique, on peut s'inspirer du comportement plastique d'un matériau. La différence à introduire provient du fait que la surface seuil est fonction de la vitesse de déformation et non plus de la déformation. Comme la partie élastique est négligée nous aurons donc tout simplement :

$$s = \frac{2\sigma_{eq}(\dot{\varepsilon})}{3\dot{\varepsilon}} \begin{cases} \overline{s} & \text{Tenseur déviateur des contraintes} \\ \overline{\dot{\varepsilon}} & \text{Tenseur déviateur des vitesses de déformation} \\ \overline{\dot{\varepsilon}} & \text{Vitesse de déformation équivalente} \end{cases}$$

On peut noter le cas particulier dit du fluide Newtonien :

$$\overline{s} = 2\mu\overline{\dot{\varepsilon}}$$



On considère classiquement différents modèles de comportement :

$$a \rightarrow \sigma_{eq} = Y(1 + \mu\overline{\dot{\varepsilon}})^m \quad \text{loi de Norton avec seuil}$$

$$b \rightarrow \sigma_{eq} = Y(1 + \mu\overline{\dot{\varepsilon}}) \quad \text{loi de Bingham}$$

$$c \rightarrow \sigma_{eq} = Y\overline{\dot{\varepsilon}} \quad \text{loi de Norton - Hoff}$$

$$d \rightarrow \sigma_{eq} = Y \quad \text{loi de Von - Misès}$$

Comme la déformation élastique est négligeable, le matériau est quasi incompressible.

On peut donc écrire :

$$\text{Trace}(\overline{\dot{\varepsilon}}) = 0 \Leftrightarrow \text{Div}(\overline{V}) = 0$$

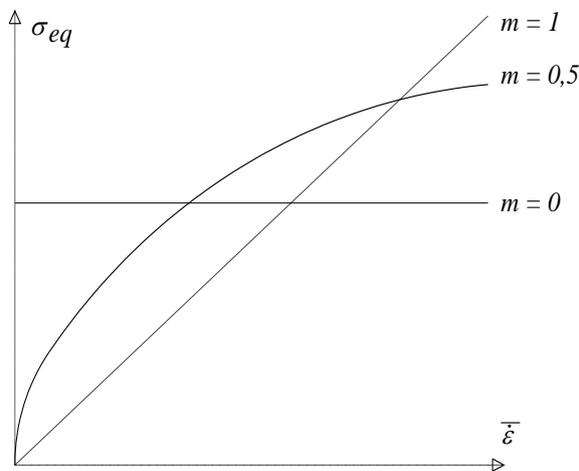
Le modèle que nous retiendrons pour la suite est le modèle de Norton-Hoff.

En 1929, Norton a introduit une loi unidimensionnelle pour représenter le comportement à haute température de certains aciers en fluage stationnaire et unidimensionnel. Très simple, cette formulation mathématique ne fait intervenir qu'un petit nombre de paramètres facilement identifiables à partir de résultats expérimentaux.

En 1954, Hoff a proposé une généralisation de cette loi à l'espace tridimensionnel. La formulation est alors la suivante :

$$\overline{s} = 2K(\sqrt{3}\overline{\dot{\varepsilon}})^{m-1}\overline{\dot{\varepsilon}}$$

Avec : K Consistance du matériau
 m Sensibilité à la vitesse de déformation.



La dépendance de la loi avec les phénomènes thermiques est assurée par l'intermédiaire des coefficients K et m . D'autre part, lorsque le mécanisme de déformation dépend de l'écoulement, il est classique de faire dépendre ces deux paramètres de la déformation généralisée $\overline{\varepsilon} = \int_0^t \overline{\dot{\varepsilon}} dt$.

L'influence du paramètre m sur la loi est mise en évidence dans la figure ci-contre.

$m = 0$ La contrainte d'écoulement est constante (cas du matériau rigide parfaitement plastique).

$m = 1$ La loi est linéaire (cas du fluide newtonien). Le coefficient K est homogène à une viscosité dynamique.

3-2 Le potentiel viscoplastique

Ainsi que nous l'avons déjà écrit, le premier principe de la thermodynamique nous donne :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = P^{ext} + \dot{Q} = \frac{\delta W^{ext}}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t}$$

Ce premier principe est encore appelé loi de conservation de l'énergie. Il exprime le fait que la variation de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développée sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps.

L'emploi du théorème de l'énergie - puissance nous permet d'écrire :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \frac{\rho V^2}{2} dv = P^{ext} + P^{int}$$

On obtient donc :

$$\frac{dE}{dt} + P^{int} = \dot{Q} = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

Avec :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$P^{int} = - \int_D \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv = - \int_D \overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} dv \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \rho e dv$$

De plus le second principe nous donne :

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{\delta t} \leq T \frac{dS}{dt}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e dv - \int_D \overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} dv \leq T \frac{dS}{dt} = T \frac{d}{dt} \int_D \rho s dv$$

D'autre part nous pouvons écrire que la quantité de chaleur échangée se décompose en un échange surfacique et un taux de chaleur volumique :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_D r dv$$

En faisant intervenir l'**énergie libre massique** $\psi = e - Ts$, l'expression locale traduisant le second principe peut s'écrire :

$$\overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}(T) \geq 0$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit, le second principe permet d'exprimer l'écart entre le processus étudié et un processus réversible.

Comme on peut le constater, cette différence fait apparaître deux origines :

* thermique par le terme $-\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}(T)$

* mécanique par le terme $\overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$

Le signe négatif du terme d'origine thermique s'explique facilement par la convention choisie.

En fait on traduit ainsi l'irréversibilité thermique. Un corps chaud ne peut que céder de la chaleur à un environnement plus froid, alors qu'à l'inverse un corps froid ne pourra que recevoir de la chaleur (apport d'énergie sous forme calorifique).

Le terme d'origine mécanique se présente sous la différence de deux quantités. La seconde quantité est définie comme étant la partie réversible de la puissance dissipée par la déformation. Elle vient toujours en déduction de la puissance de déformation.

Dans le cas d'une théorie purement mécanique, on peut négliger les effets thermiques. Nous avons ainsi :

$$\overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) \geq 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\Phi = \overset{==}{\sigma} : \dot{\epsilon} - \dot{W} \geq 0$$

D'une façon générale nous aurons donc l'égalité :

$$\overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} = \dot{\overline{\overline{W}}} + \Phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} \quad \text{Puissance mécanique fournie au système} \\ \dot{\overline{\overline{W}}} \quad \text{Energie stockée = Potentiel élastique} \\ \Phi \quad \text{Energie dissipée = Potentiel viscoplastique} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un modèle purement dissipatif, sans effet thermique, l'énergie élastique est nulle et nous avons donc :

$$\overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} = \Phi$$

On peut en déduire la relation suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}$$

Exemples de modèles

Amortisseur	$\Phi = \frac{1}{2} L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} \Rightarrow \sigma_{ij} = L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$
Plastique	$\Phi = \sqrt{L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}}$
Norton - Hoff	$\Phi = \frac{1}{m+1} (L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl})^{(m+1)/2}$

Dans le cas d'un comportement isotrope, le tenseur du quatrième ordre L est de la forme :

$$L_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

En général on découpe partie sphérique et partie déviatorique :

$$\Phi(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \Rightarrow \Phi(\overline{\overline{\theta}}, \overline{\overline{e}}_{ij}) = -3p\overline{\overline{\theta}} + s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

avec :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + s \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\theta}}\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{e}}$$

On pourra donc écrire :

$$s = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\overline{\overline{e}}}}$$

Cette dernière relation montre bien l'importance du potentiel viscoplastique dans l'établissement de la loi de comportement du matériau.

3-3 Le modèle de frottement

Dans la modélisation d'un procédé de mise en forme, la connaissance de la loi de frottement entre l'outil et la pièce est très importante. Pour un matériau possédant un comportement viscoplastique de Norton - Hoff, il est classique de lui associer la loi de frottement de Norton. Pour établir cette loi, on suppose qu'il existe une fine couche d'un matériau viscoplastique emprisonné entre un massif parfaitement rigide (l'outil) et la pièce viscoplastique. L'emploi de la loi de Norton -Hoff donne alors l'expression de la cission en fonction du taux de cisaillement de cette couche.

Si h est l'épaisseur de la couche lubrifiante cisailée entre les deux massifs de vitesse de glissement relative $\Delta \vec{V}_g$, la cission s'écrit :

$$\sigma_c = \alpha_f \left\| \Delta \vec{V}_g \right\|^{p_f - 1} \cdot \Delta \vec{V}_g$$

avec :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\alpha_f = \frac{K_0}{h^{p_f}} \begin{cases} K_0 & \text{Consistance de la couche cisailée} \\ p_f & \text{Sensibilité à la vitesse de glissement} \end{cases}$$

Ce modèle de couche limite à l'interface donne une expression possible de la cission de frottement entre le matériau viscoplastique et l'outil rigide. Le massif viscoplastique subit une cission de signe opposé à σ_c , établissant ainsi la loi de frottement de Norton :

$$\tau = -\alpha_f \|\Delta \vec{V}_g\|^{p_f-1} \cdot \Delta \vec{V}_g$$

Comme pour la loi rhéologique, il est possible de définir un potentiel de dissipation surfacique :

$$\vec{\tau} = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \vec{V}} \Rightarrow \Phi_f = \frac{\alpha_f}{p_f + 1} \|\Delta \vec{V}_g\|^{p_f+1}$$

3-4 Résolution analytique

Le système d'équations à solutionner est le suivant :

* Le principe fondamental de la mécanique

$$\rho \vec{\gamma} = \text{div}(\vec{\sigma}) + \rho \vec{f} \begin{cases} \rho & \text{Masse volumique} \\ \vec{\gamma} & \text{Vecteur accélération} \\ \vec{f} & \text{Vecteur force de volume par unité de volume} \end{cases}$$

* La loi de comportement

Partie sphérique

$$\dot{p} = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \text{Trace}(\dot{\vec{\varepsilon}}) = -\frac{3\lambda+2\mu}{3} \dot{\theta} \begin{cases} p & \text{pression} \\ \theta & \text{trace du tenseur des déformations} \end{cases}$$

Partie déviatorique

$$\dot{s} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{2\sigma_{eq}(\dot{\varepsilon})}{3\dot{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \begin{cases} s & \text{tenseur déviateur des contraintes} \\ e & \text{tenseur déviateur des déformations} \\ \dot{\varepsilon} & \text{vitesse de déformation équivalente} \end{cases}$$

* Les relations tenseurs taux de déformation-vitesse de déplacement

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(\vec{V}) + {}^T \text{grad}(\vec{V}) \right) \begin{cases} \dot{\varepsilon} & \text{tenseur des taux de déformation} \\ \vec{V} & \text{vecteur vitesse de déplacement} \end{cases}$$

Comme on peut le constater, dans ce schéma (petites perturbations) nous avons donc un système différentiel de 15 équations pour 15 inconnues $(\vec{\sigma}, \dot{\varepsilon}, \vec{V})$. Pour définir "la solution" il convient de se donner :

- l'historique du chargement
- l'historique des conditions aux limites

Dans le cas général il n'existe pas de solution analytique immédiate. Toutefois, dans certains cas particuliers (chargement monotone avec des conditions géométriques simples par exemple), il est possible d'avoir une solution analytique. Nous allons en donner quelques exemples.

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Plaçons-nous dans le cas de l'utilisation du critère de Von-Mises :

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\varepsilon} : \bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}$$

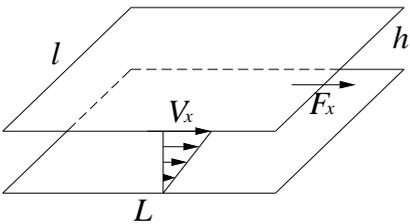
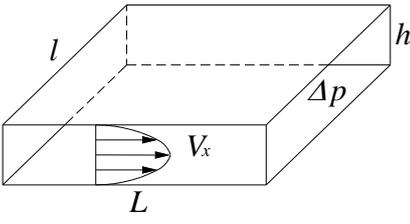
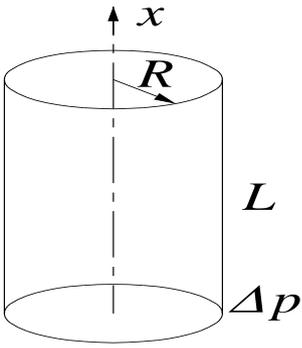
D'autre part considérons un comportement de type Norton - Hoff :

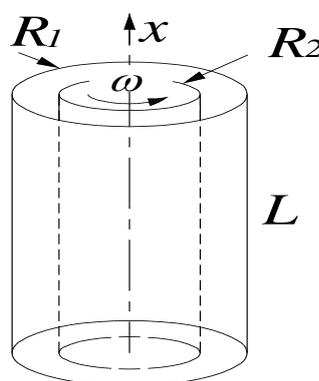
$$\bar{s} = 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon})^{m-1}\dot{\bar{\varepsilon}}$$

Pour $m=0$, on obtient le comportement du fluide newtonnien :

$$\bar{s} = 2\mu\dot{\bar{\varepsilon}}$$

Le tableau suivant résume les résultats fondamentaux pour des écoulements types :

	Norton - Hoff	Newton
	$\bar{s} = 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon})^{m-1}\dot{\bar{\varepsilon}}$	$\bar{s} = 2\mu\dot{\bar{\varepsilon}}$
<p>Cisaillement plan</p> 	$V_x(y) = V \frac{y}{h}$ $F_x = KLl \left(\frac{V}{h} \right)^m$	$V_x(y) = V \frac{y}{h}$ $F_x = \mu Ll \frac{V}{h}$
<p>Poiseuille plan</p> 	$V_x(y) = \frac{2m+1}{m+1} V \left[1 - \left(\frac{2 y }{h} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right]$ $Q_v = \frac{mh^{\frac{2m+1}{m}} l}{2^{\frac{1}{m}} (2m+1)} \left(\frac{\Delta p}{KL} \right)^{\frac{1}{m}}$	$V_x(y) = \frac{3}{2} V \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]$ $Q_v = \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{L} h^3 l$
<p>Poiseuille tube</p> 	$V_x(r) = \frac{3m+1}{m+1} V \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right]$ $Q_v = \frac{\pi m}{3m+1} \left[\frac{\Delta p}{2KL} \right]^{\frac{1}{m}} R^{\frac{3m+1}{m}}$	$V_x(r) = 2V \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$ $Q_v = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^4$

<p>Couette</p> 	$V_{\theta}(r) = r\omega \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{R_2^{\frac{2}{m}} - r^{\frac{2}{m}}}{R_2^{\frac{2}{m}} - R_1^{\frac{2}{m}}} \right)$ $C = 2^{m+1} \pi K L R_1^2 R_2^2 \left(\frac{\omega}{m \left(\frac{2}{R_2^m} - \frac{2}{R_1^m} \right)} \right)$	$V_{\theta}(r) = \frac{R_1^2 \omega}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{r} \right)$ $C = 4\pi \mu \frac{R_1^2 R_2^2 \omega}{R_2^2 - R_1^2}$
--	--	---

Dans ce tableau, V représente le module du vecteur vitesse imposé, V_x est la composante suivant l'axe x du vecteur vitesse, F_x est la composante suivant l'axe x de l'effort appliqué, Q_v est le débit volume dans la section de passage, V_{θ} est la composante du vecteur vitesse suivant l'axe orthoradial θ et C est le couple appliqué.

3-5 Résolution numérique

La méthode précédente ne peut être appliquée qu'à partir de l'instant où des hypothèses simplificatrices viennent diminuer le nombre d'inconnues. Hélas dans la plupart des cas on ne peut pas formuler de telles hypothèses. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques du type éléments finis pour solutionner le problème posé.

3-5-1 Formulation variationnelle

L'utilisation du principe des puissances virtuelles permet la construction de modélisations associées à notre problème de mécanique.

Généralement, dans les procédés de mise en forme, les termes d'inertie et les forces de volume sont négligeables. Le principe de puissances virtuelles nous donne alors :

$$\forall \bar{u}^* \in CA_0 \quad P(\bar{u}, \bar{u}^*) = - \int_D \bar{\sigma} : \bar{\dot{\epsilon}}^* dv = - L(\bar{u}^*) = - \int_{S_f} \bar{\Phi} \cdot \frac{d\bar{u}^*}{dt} dv$$

CA_0 est l'espace des champs vectoriels \bar{u}^* de déplacement deux fois continûment dérivables et ayant des déplacements nuls sur la surface S_u du domaine

$\bar{\Phi}$ est le vecteur densité des forces surfaciques

$$\bar{\dot{\epsilon}}^* = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad} \left(\frac{d\bar{u}^*}{dt} \right)} + {}^T \overline{\text{grad} \left(\frac{d\bar{u}^*}{dt} \right)} \right) \text{ est le tenseur des taux de déformations virtuelles}$$

Le problème qui se pose pour la méthode des éléments finis est la définition puis la minimisation d'une fonctionnelle. Il est possible de partir soit d'une formulation en contrainte, soit d'une formulation en vitesse, soit d'une formulation mixte.

Le cas d'une formulation en contrainte n'est pas intéressant car l'espace de minimisation est très restreint. En effet, on doit prendre le champ de contrainte parmi l'ensemble des champs satisfaisant l'équation d'équilibre :

$$\text{div}(\bar{\sigma}) = \bar{0}$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

L'espace de définition peut être élargi dans le cas d'une formulation mixte contraintes - vitesses, mais alors la mise en oeuvre numérique est très coûteuse en temps de calcul à cause du nombre élevé d'inconnues (3 composantes du vecteur vitesse + 6 composantes du tenseur des contraintes).

En fait, il reste donc la formulation en vitesse qui permet d'atteindre un bon compromis entre la facilité de mise en oeuvre, la qualité des résultats et le coût en temps de calcul. Par contre le champ de contrainte ne sera pas obtenu directement puisque la connaissance du champ des vitesses ne permet de calculer que le tenseur déviateur des contraintes. Il s'ensuit que la pression hydrostatique est indéterminée et devra être calculée à partir de l'équation d'équilibre. Il sera nécessaire de définir une méthode qui permette de prendre en compte la condition de pression dans la formulation.

On démontre alors que le champ de vitesse réel est, parmi les champs de vitesse admissibles, celui qui minimise la fonctionnelle $\psi(\vec{V})$ définie par :

$$\psi(\vec{V}) = \int_D \frac{K}{m+1} (\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{m+1} dv + \int_{S_g} \frac{\alpha_f}{p_f + 1} \|\Delta \vec{V}_g\|^{p_f + 1} ds - \int_{S_f} \vec{\Phi} \cdot \vec{V} ds$$

Avec :

- S_g surface du domaine soumise au frottement
- S_f surface du domaine soumise à des efforts imposés

La minimisation de la fonctionnelle revient en fait à écrire que la dérivée première de $\psi(\vec{V})$ par rapport au champ de vitesse est nulle. Le problème est ainsi ramené à trouver le champ de vitesse cinématiquement admissible qui vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{V}} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \psi}{\partial V_i} \cdot V_i = 0 \quad \text{minimisation} \\ \text{div}(\vec{V}) = V_{i,i} = 0 \quad \text{incompressibilité} \end{array} \right\} \text{Pour } \vec{V} \text{ satisfaisant aux conditions aux limites}$$

3-5-2 Formulation de l'incompressibilité

Les problèmes liés à l'incompressibilité proviennent du fait qu'il n'est pas a priori évident de construire des champs de vitesse vérifiant la relation $\text{div}(\vec{V}) = 0$ sur tout le domaine d'étude. On est confronté à un problème de minimisation sous contrainte bien connu des mathématiciens. Différentes méthodes sont proposées :

- * Les multiplicateurs de Lagrange
- * La méthode du Lagrangien augmenté
- * La pénalisation

Les deux premières méthodes ont l'inconvénient d'introduire des inconnues supplémentaires. Par contre la pénalisation ne fait intervenir que le champ de vitesse.

La fonctionnelle pénalisée se déduit de ψ par :

$$\psi_p = \psi + \frac{1}{2} \rho_p \int_D K (\text{div}(\vec{V}))^2 dv$$

Le coefficient de pénalisation ρ_p doit être choisi très grand devant la fonctionnelle ψ . Ainsi le minimum de la fonctionnelle pénalisée ψ_p ne pourra être atteint que si la condition d'incompressibilité est vérifiée. Dans le cas contraire, le terme pénalisé rendrait cette fonctionnelle fortement positive.

3-5-3 Discrétisation temporelle

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

Pour résoudre un problème instationnaire, il est nécessaire de décrire l'évolution des variables au cours du temps. On discrétise alors la durée de l'opération en une succession d'incréments Δt .

A l'instant t un domaine matériel D est décrite par la position de chacun de ses points. On a ainsi la configuration $\Omega(t)$. Pour évaluer la configuration $\Omega(t + \Delta t)$ à l'instant suivant, il est possible d'utiliser un schéma d'Euler explicite basée sur la connaissance du champ de vitesse à l'instant t :

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) + V(t) \cdot \Delta t$$

Ce schéma suppose que les variations induites sur le champ de vitesse par les évolutions géométriques et rhéologiques introduisent une erreur sur chaque incrément qui, une fois cumulée sur l'intervalle de temps total, reste dans des limites acceptables. Cette méthode sera donc satisfaisante pour un choix de Δt suffisamment petit et tant que la variation du champ de vitesse reste faible. On démontre qu'au-delà d'une valeur maximale du pas de temps, le schéma devient divergent.

On peut remédier à cet inconvénient en employant un schéma implicite ou semi-implicite. Dans ce cas l'équilibre mécanique doit être vérifié au début et à la fin de l'incrément de temps. Il s'ensuit un couplage entre les équations d'évolution de la configuration et les équations d'équilibre, ce qui conduit à une méthode itérative. Le caractère implicite du schéma est dû à la prise en compte du champ de vitesse à l'instant $t + \Delta t$, a priori inconnu, pour évaluer la configuration $\Omega(t + \Delta t)$:

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) + [(1 - \beta)V(t) + \beta V(t + \Delta t)] \Delta t$$

Dans cette formulation β est un paramètre choisi entre 0 et 1. Ce schéma est stable car il n'existe pas de pas de temps maximal au-delà duquel le schéma diverge. Le champ de vitesse calculé est en équilibre sur la configuration finale. L'inconvénient est que ce type de schéma est coûteux en temps de calcul.

3-5-4 Discrétisation spatiale

La formulation retenue étant une formulation en vitesse, on remplace le champ de vitesse inconnu par un champ approché dont on cherche à connaître les valeurs en un nombre fini de points appelés noeuds. La vitesse en un point quelconque d'un élément du maillage est déterminée par la connaissance de la vitesse aux noeuds de cet élément et des fonctions d'interpolation polynomiales associées à chacun de ces noeuds.

En coordonnées cartésiennes nous écrivons :

$$V_i = \sum_{\lambda} N_{\lambda}^e \cdot V_{i\lambda}^e \quad \begin{cases} i & \text{indice de la direction de projection } (x, y, z) \\ \lambda & \text{numéro du noeud dans l'élément } e \end{cases}$$

La fonctionnelle à minimiser se présente sous la forme d'une somme de quatre termes :

$$\psi_p = \psi_{visc} + \psi_{frot} + \psi_{for} + \psi_{pen} \quad \begin{cases} \psi_{visc} & \text{terme de dissipation interne} \\ \psi_{frot} & \text{terme de dissipation surfacique} \\ \psi_{for} & \text{terme de puissance fournie} \\ \psi_{pen} & \text{terme de pénalisation} \end{cases}$$

La minimisation totale de la fonctionnelle pénalisée conduit à exprimer les variations de chacun de ces termes vis à vis des variables nodales.

Terme de dissipation interne (rhéologie)

Ce terme prend en compte la rhéologie du matériau. Il peut se mettre sous la forme :

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

$$\psi_{visc}^e = \int_{D_e} f(\overline{\dot{\epsilon}:\dot{\epsilon}}) dv \quad \text{avec} \quad f(\overline{\dot{\epsilon}:\dot{\epsilon}}) = \frac{K}{m+1} \left[\overline{\dot{\epsilon}:\dot{\epsilon}} \right]^{\frac{m+1}{2}}$$

On obtient :

$$\frac{\partial \psi_{visc}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} = \int_{D_e} 2f'(\overline{\dot{\epsilon}:\dot{\epsilon}}) \overline{\dot{\epsilon}} : \frac{\partial \overline{\dot{\epsilon}}}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} dv$$

Mais de plus :

$$\frac{\partial \overline{\dot{\epsilon}}}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}(N_\lambda^e \vec{E}_i)} + {}^T \overline{\text{grad}(N_\lambda^e \vec{E}_i)} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_i \text{ vecteur de base dans la direction } i$$

En tenant compte de la symétrie du tenseur des taux de déformation :

$$\frac{\partial \psi_{visc}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} = \int_{D_e} 2f'(\overline{\dot{\epsilon}:\dot{\epsilon}}) \overline{\dot{\epsilon}} : \overline{\text{grad}(N_\lambda^e \vec{E}_i)} dv$$

Terme de dissipation surfacique

Ce terme intègre la dissipation surfacique due au frottement entre les surfaces en contact.

$$\psi_{frot}^e = \int_{S_g} g(\|\Delta \vec{V}_g\|) ds \quad \text{avec} \quad g(\|\Delta \vec{V}_g\|) = \frac{\alpha_f}{p_f + 1} \|\Delta \vec{V}_g\|^{p_f + 1}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \psi_{frot}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} = \int_{S_g} g'(\|\Delta \vec{V}_g\|) \frac{\partial \|\Delta \vec{V}_g\|}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} ds$$

Terme de puissance fournie

C'est en fait la puissance fournie par les efforts surfaciques puisque les termes volumiques ont été négligés. On a directement :

$$\frac{\partial \psi_{for}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} = - \int_{S_t} \vec{\Phi} \cdot N_\lambda^e ds$$

Terme de pénalisation

Comme nous l'avons déjà dit, ce terme va nous permettre de prendre en compte la notion d'incompressibilité du matériau. Nous avons :

$$\psi_{pen}^e = \frac{1}{2} \rho_p \int_{D_e} K \frac{\partial (\text{div}(\vec{V}))^2}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} dv = \rho_p \int_{D_e} K \text{div}(\vec{V}) \text{div}(N_\lambda^e \vec{E}_i) dv$$

3-5-5 Résolution du système

Nous nous retrouvons donc avec un système numérique non linéaire. Pour aborder la résolution, une méthode efficace est la méthode de Newton-Raphson.

Il s'agit en fait de résoudre itérativement le système :

$$\left[\mathbf{H}(\mathbf{V}^i) \right] \left\{ \Delta \mathbf{V}^i \right\} = - \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{V}^i) \right\} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}^{i+1} = \mathbf{V}^i + \lambda \Delta \mathbf{V}^i$$

Michel MAYA

Enseignant en école d'ingénieur retraité

λ est un paramètre permettant d'optimiser le nombre d'itérations pour atteindre la solution. Dans cette expression \mathbf{H} est appelé *Hessien de la fonctionnelle*. C'est la dérivée seconde de celle-ci par rapport aux inconnues du système. La matrice hessienne est symétrique, cette propriété étant particulièrement intéressante pour réaliser un stockage économique en mémoire centrale.

La matrice hessienne est la somme de plusieurs termes :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{visc} + \mathbf{H}_{frot} + \mathbf{H}_{pen} \quad \text{car } \mathbf{H}_{for} = \mathbf{0}$$

Avec les fonctions f et g précédemment définies on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi_{visc}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda} \partial \mathcal{N}_{j\mu}} = \int_{D_e} 4 f''(\bar{\dot{\epsilon}} : \bar{\dot{\epsilon}}) \bar{\dot{\epsilon}} : \overline{\text{grad}(N_\lambda^e \bar{E}_i)} \bar{\dot{\epsilon}} : \overline{\text{grad}(N_\mu^e \bar{E}_j)} dv + \int_{D_e} f'(\bar{\dot{\epsilon}} : \bar{\dot{\epsilon}}) \overline{\text{grad}(N_\lambda^e \bar{E}_i)} : \left[\overline{\text{grad}(N_\mu^e \bar{E}_j)} + {}^T \overline{\text{grad}(N_\mu^e \bar{E}_j)} \right] dv$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{frot}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda} \partial \mathcal{N}_{j\mu}} = \int_{S_g} \left[g''(\|\Delta \vec{V}_g\|) \frac{\partial \|\Delta \vec{V}_g\|}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} \frac{\partial \|\Delta \vec{V}_g\|}{\partial \mathcal{N}_{j\mu}} + g'(\|\Delta \vec{V}_g\|) \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{j\mu}} \left(\frac{\partial \|\Delta \vec{V}_g\|}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda}} \right) \right] ds$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{pen}^e}{\partial \mathcal{N}_{i\lambda} \partial \mathcal{N}_{j\mu}} = \int_{D_e} 2 \rho_p \text{div}(N_\lambda^e \bar{E}_i) \text{div}(N_\mu^e \bar{E}_j) dv$$